EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBROS X-XIII

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS

ELEMENTOS

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 228

EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBROS X-XIII

TRADUCCIÓN Y NOTAS DE
MARÍA LUISA PUERTAS CASTAÑOS

EDITORIAL GREDOS, S. A.

Asesor para la sección griega: CARLOS GARCÍA GUAL.

Según las normas de la B. C. G., la traducción de este volumen ha sido revisada por PALOMA ORTIZ.

López de Hoyos, 141, 28002 Madrid.
www.rbalibros.com

1ª. REIMPRESIÓN.

Depósito legal: M.-19.667-2008.

ISBN 978-84-249-1463-5. Obra completa.

ISBN 978-84-249-1830-4. Tomo III.

NOTA DE LA TRADUCTORA

Esta entrega de los libros X-XIII completa la traducción de los *Elementos* de Euclides. Mantengo naturalmente el texto griego de referencia y las convenciones que he empleado en las entregas anteriores —véase la nota inicial sobre la traducción de los libros I-IV (Madrid: Gredos [B.C.G. 155], 1991) y V-IX (Madrid: Gredos [B.C.G. 191], 1994).

En el presente caso, el libro X ha seguido siendo la «cruz» de los *Elementos* y, desde luego, una cruz para la traductora. Por fortuna, durante los primeros meses de 1993 pude contar con la paz, las facilidades y los incentivos de Cambridge para dar forma a un primer borrador de la traducción de este libro. Entre esas facilidades e incentivos quiero destacar especialmente la generosidad de Geoffrey Lloyd quien, además, me brindó la oportunidad de hablar de algunos aspectos del libro con los profesores Ian Mueller y David H. Fowler en sus visitas a Cambridge. Una consecuencia ha sido mi opción por traducir el término crucial *álogon* no en la versión tradicional de «irracional», sino en otra versión más contextualizada y explícita, como «no racionalmente expresable», alternativa que no deja de tener repercusiones sobre la interpretación del propósito y del sentido de este espinoso libro X en el marco del tratado. También me parece justo recordar que sin el estímulo y la asistencia de Luis Vega a lo largo de las sucesivas versiones y correcciones que han ido conformando esta traducción de los *Elementos* y sin sus contribuciones a las notas, la suerte de la empresa habría sido mucho más aventurada. Espero, cuando menos, que la presente edición venga a cumplir el compromiso pendiente en nuestra lengua con esta obra clásica desde la ya lejana traducción inaugural de Rodrigo Zamorano (1576).

LIBRO DÉCIMO

DEFINICIONES

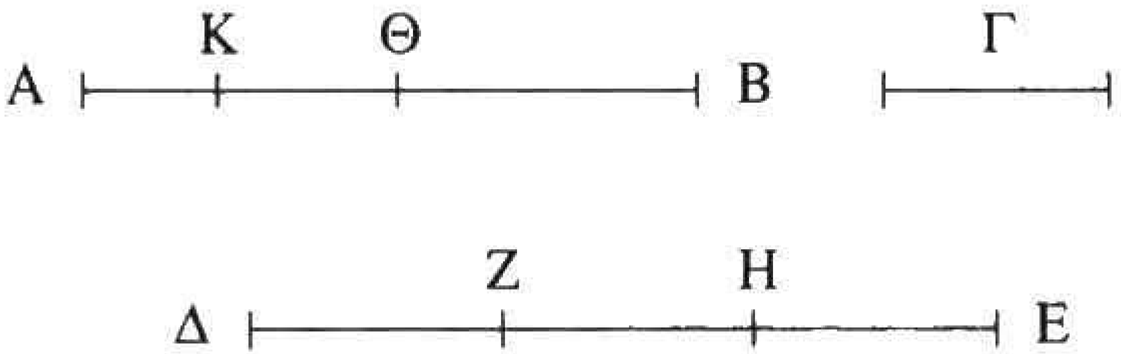
1. Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.
2. Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común[1].
3. Dados estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada. Llámese entonces racionalmente expresable la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien sólo en cuadrado, racionalmente expresables y las inconmensurables con ella llámense no racionalmente expresables[2].
4. Y el cuadrado de la recta determinada (llámese) racionalmente expresable, y los cuadrados conmensurables con éste racionalmente expresables; pero los inconmensurables con él llámense no racionalmente expresables; y las rectas que los producen (llámense) no racionalmente expresablas, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas (rectas) que construyan cuadrados iguales a ellos[3].

Proposición 1

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Sean AB, Γ dos magnitudes desiguales de las cuales AB es la mayor.

Digo que, si se quita de AB una (magnitud) mayor que su mitad y de la (magnitud) restante, una (magnitud) mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud Γ.



Pues Γ multiplicada será alguna vez mayor que AB [V Def. 4]. Multiplíquese y sea ΔE un múltiplo de Γ mayor que AB; divídase ΔE en ΔZ, ZH, HE iguales a Γ, y de AB quítese BΘ mayor que su mitad, y de AΘ (quítese) ΘK mayor que su mitad, y así sucesivamente hasta que las divisiones de AB lleguen a ser iguales en número a las divisiones de ΔE.

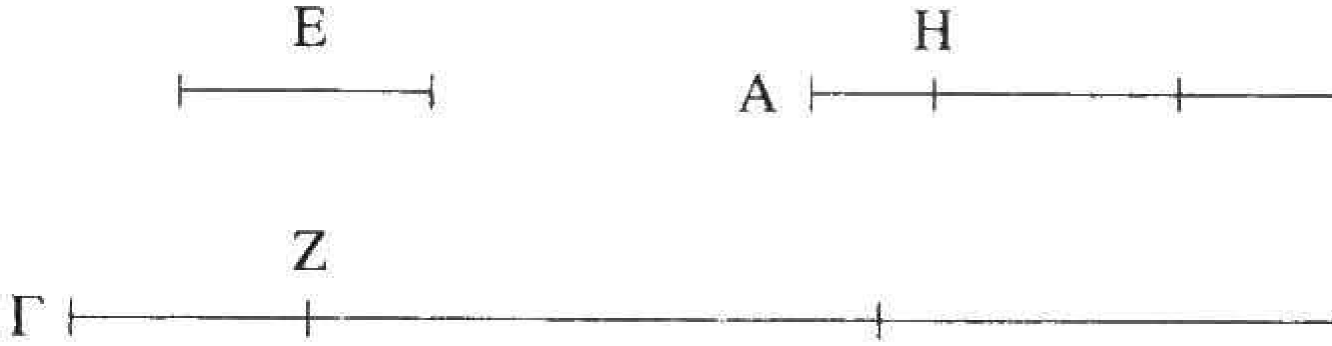
Sean, pues, AK, KΘ, ΘB divisiones que son iguales en número a las (divisiones) ΔZ, ZH, HE; ahora bien, dado que ΔE es mayor que AB y que de ΔE se ha quitado la (magnitud) EH menor que su mitad y de AB la (magnitud) BΘ mayor que su mitad, entonces la magnitud restante HΔ es mayor que la (magnitud) restante ΘA. Y dado que HΔ es mayor que ΘA y se ha quitado de HΔ su mitad HZ y de ΘA una (magnitud) ΘK mayor que su mitad, entonces la (magnitud) restante ΔZ es mayor que la (magnitud) restante AK. Pero ΔZ es igual a Γ; luego es mayor que AK. Por tanto, AK es menor que Γ.

Por consiguiente, de la magnitud AB queda la magnitud AK que es menor que la magnitud dada Γ. Q. E. D. De manera semejante demostraríamos que (esto ocurre) también si se quita la mitad[4].

Proposición 2

Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Habiendo, pues, dos magnitudes desiguales AB, ΓΔ y (siendo) AB la menor, al restar sucesivamente la menor de la mayor, no mida nunca la (magnitud) restante a la anterior a ella.



Digo que las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud), si es posible, y sea E; y AB, al medir a ZΔ, deje la magnitud ΓZ menor que ella, y ΓZ, al medir a BH, deje AH menor que ella, y repítase así sucesivamente hasta que quede una magnitud que sea menor que E. Sea así y quede AH menor que E. Así pues, como E mide a AB y AB mide a ΔZ, entonces E también medirá a ZΔ. Pero mide también a la magnitud entera ΓΔ; luego medirá también a la magnitud restante ΓZ. Ahora bien, ΓZ mide a BH; entonces E también mide a BH. Pero mide también a la (magnitud) entera AB; así que medirá también a la (magnitud) restante AH, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a las magnitudes AB, ΓΔ; por tanto, las magnitudes AB, ΓΔ son inconmensurables [X Def. 1].

Por consiguiente, si de dos magnitudes desiguales..., etc.[5].

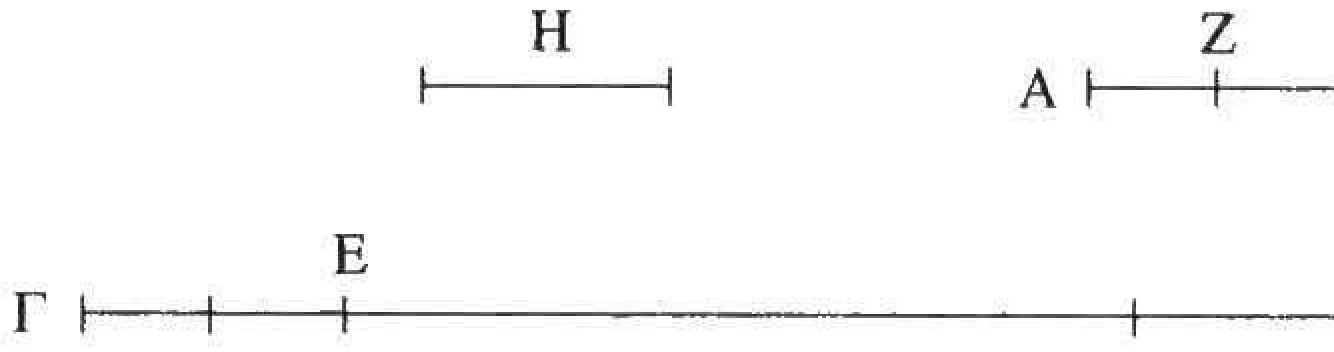
Proposición 3

Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

Sean AB, ΓΔ dos magnitudes dadas conmensurables, de las cuales AB sea la menor.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Pues bien, AB o mide a ΓΔ o no la mide. Si, en efecto, la mide y se mide también a sí misma, entonces AB es una medida común de AB, ΓΔ; y está claro que también es la mayor. Porque no medirá a AB ninguna magnitud mayor que AB.



Pero ahora no mida AB a ΓΔ y, al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor, la (magnitud) restante medirá alguna vez a la anterior a ella, porque AB, ΓΔ no son inconmensurables [X 2]; y AB, al medir a EΔ, deje la (magnitud) EΓ menor que ella, y EΓ, al medir a ZB, deje la (magnitud) AZ menor que ella y mida AZ a ΓE.

Como, en efecto, AZ mide a ΓE, mientras que ΓE mide a ZB, entonces AZ medirá también a ZB. Pero también se mide a sí misma; luego AZ medirá también a la (magnitud) entera AB. Ahora bien, AB mide a ΔE; entonces AZ medirá también a EΔ. Pero mide también a ΓE; luego mide también a la (magnitud) entera ΓΔ; por tanto, AZ es una medida común de AB, ΓΔ.

Digo ahora que también es la mayor. Pues, si no, habrá una magnitud mayor que AZ que medirá a AB, ΓΔ. Sea H. Así pues, dado que H mide a AB, mientras que AB mide a EΔ, entonces H medirá a EΔ. Pero mide también a la (magnitud) entera ΓΔ; luego H medirá también a la (magnitud) restante ΓE. Pero ΓE mide a ZB; luego H medirá también a ZB. Pero también mide a la (magnitud) entera AB y medirá también a la (magnitud) restante AZ, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud mayor que AZ medirá a AB, ΓΔ; por tanto AZ es la medida común máxima de AB, ΓΔ.

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima, AZ, de las dos magnitudes dadas AB, ΓΔ. Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a dos magnitudes, medirá también a su medida común máxima[6].

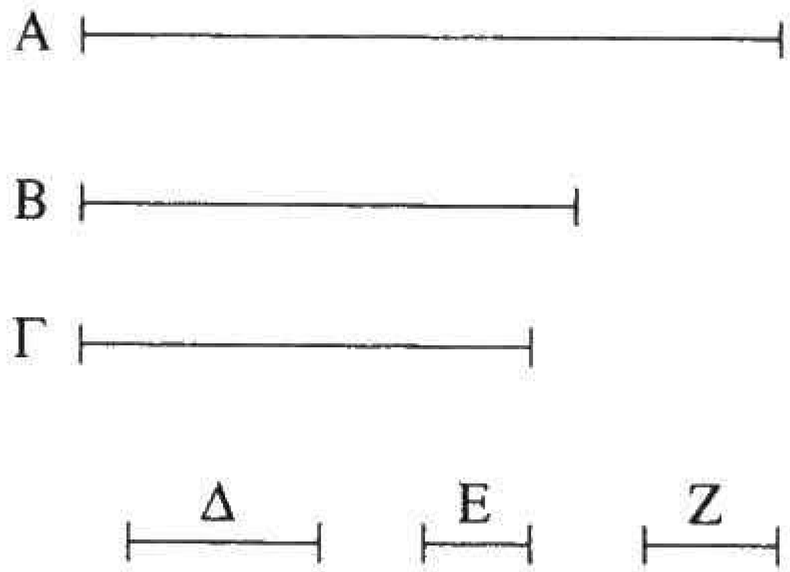
Proposición 4

Dadas tres magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

Sean A, B, Γ las tres magnitudes conmensurables dadas.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de A, B, Γ.

Tómese, pues, la medida común máxima de A, B y sea Δ [X 3]. Pues bien, o Δ mide a Γ o no la mide. En primer lugar, mídala. Así pues Δ mide a Γ, y mide también a A, B, entonces Δ mide a A, B, Γ; por tanto Δ es una medida común de A, B, Γ. Y está claro que también la mayor, porque una magnitud mayor que la magnitud Δ no mide a A, B.



No mida ahora Δ a Γ.

Digo en primer lugar que Γ, Δ son conmensurables.

Porque como A, B, Γ son conmensurables, las medirá alguna magnitud que evidentemente medirá también a A, B; de modo que la medida común máxima de A, B medirá también a Δ. Y mide también a Γ; de modo que la antedicha magnitud medirá también a Δ, la medida común máxima de A, B [X 3 Por.], luego Γ, Δ son conmensurables.

Pues bien, tómese su medida común máxima y sea E [X 3]. Así pues, dado que E mide a Δ, mientras que Δ mide a A, B, entonces E medirá también a A, B. Pero mide también a Γ. Luego E mide a A, B, Γ; por tanto E es una medida común de A, B, Γ.

Digo ahora que también la mayor.

Pues, si es posible, sea Z una magnitud mayor que E y mida a A, B, Γ. Ahora bien, puesto que Z mide a A, B, Γ, entonces medirá también a A, B y a la medida común máxima de A, B [X 3 Por.]. Pero la medida común máxima de A, B es Δ; entonces Z mide a Δ. Pero mide también a Γ; luego Z mide a Δ. Y mide también a Γ. Por tanto Z mide a Γ, Δ; entonces Z medirá también a la medida común máxima de Γ, Δ [X 3 Por.]. Pero es E; luego Z medirá a E, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Por tanto, ninguna (magnitud) mayor que la magnitud E mide a A, B, Γ; luego la medida común máxima de A, B, Γ es E, si Δ no mide a Γ, y si la mide, es la propia (magnitud) Δ.

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima de las tres magnitudes conmensurables dadas.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a tres magnitudes, medirá también a su medida común máxima.

De manera semejante se hallará la medida común máxima de más magnitudes y se extenderá el porisma. Q. E. D.[7].

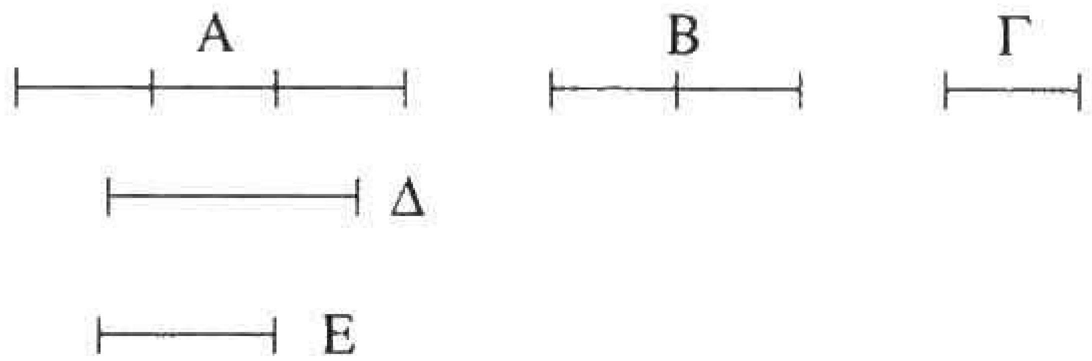
Proposición 5

Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Sean A, B magnitudes conmensurables.

Digo que A guarda con B la misma razón que un número con un número.

Pues, como A, B son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas una magnitud y sea Γ. Y cuantas veces Γ mida a A, tantas unidades haya en Δ, y cuantas veces Γ mida a B, tantas unidades haya en E.



Así pues, dado que Γ mide a A según las unidades de Δ y la unidad mide a Δ según sus unidades, entonces la unidad mide al número Δ el mismo número de veces que la magnitud Γ a la (magnitud) A; luego, como Γ es a A, así la unidad es a Δ [VII Def. 20]; entonces, por inversión, como A es a Γ, así Δ a la unidad [V 7 Por.]. Como Γ mide a su vez a Δ según las unidades de E, mientras que la unidad mide también a E según sus unidades, entonces la unidad mide a E el mismo número de veces que Γ a B. Luego, como Γ es a B, así la unidad es al (número) E. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ, Δ es a la unidad. Luego, por igualdad, como A es a B, así el número Δ es al (número) E [V 22].

Por consiguiente, las magnitudes conmensurables A, B guardan entre sí la misma razón que el número Δ con el número E. Q. E. D.[8].

Proposición 6

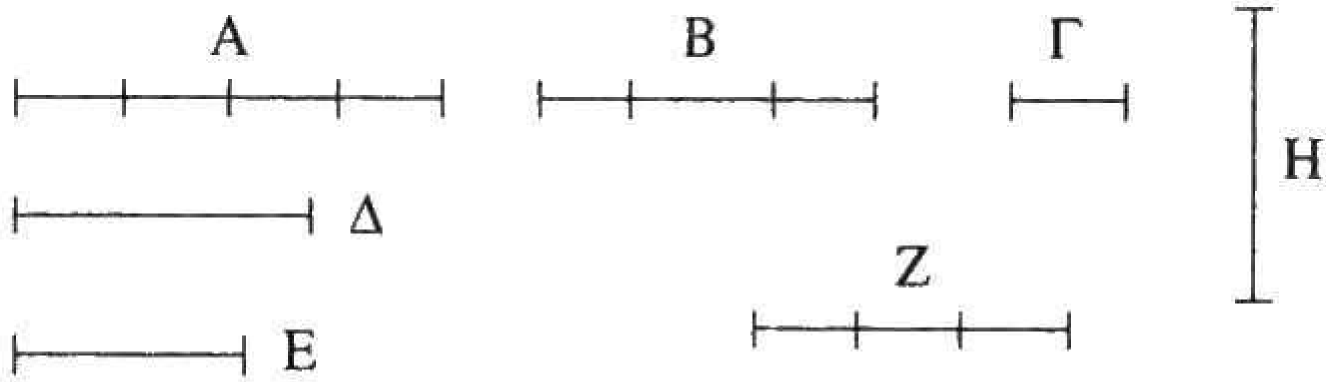
Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número (guarda) con un número, las magnitudes serán conmensurables.

Guarden, pues, las dos magnitudes A, B entre sí la razón que el número Δ (guarda) con el número E.

Digo que las magnitudes A, B son conmensurables.

Pues divídase A en tantas (magnitudes) iguales como unidades hay en Δ, y sea Γ igual a una de ellas; y compóngase Z de tantas unidades iguales a Γ como unidades hay en E.

Así pues, dado que, cuantas unidades hay en Δ, tantas magnitudes iguales a Γ hay en A, entonces, la parte que la unidad es de Δ, la misma parte es también Γ de A; luego, como Γ es a A, así la unidad es a Δ [VII Def. 20]. Pero la unidad mide al número Δ; entonces también Γ mide a A. Ahora bien, dado que, como Γ es a A, así la unidad es al (número) Δ, entonces, por inversión, como A es a Γ, así el número Δ es a la unidad [V 7 Por.]. Y puesto que, cuantas unidades hay en E, tantas hay a su vez en Z iguales a Γ, entonces como Γ es a Z, así la unidad es al (número) E [VII Def. 20]. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ, así Δ a la unidad; entonces, por igualdad, como A es a Z, así Δ a E [V 22]; ahora bien, como Δ es a E, así A a B; entonces, como A es a B, así también a Z [V 11]. Luego A guarda la misma razón con cada una de las (magnitudes) B, Z; por tanto, B es igual a Z [V 9]. Pero Γ mide a Z; luego mide también a B. Pero también a A; luego Γ mide a A, B. Por tanto, A es conmensurable con B.



Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.

Porisma:

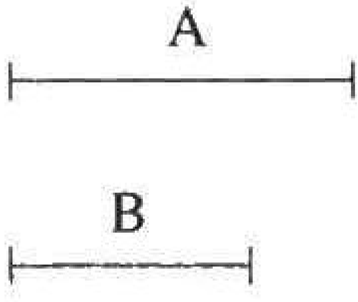
A partir de esto queda claro que, si hay dos números, como Δ, E, y una recta, como A, es posible hacer una recta [Z] que sea a la recta como el número Δ es al número E. Pero, si se toma una media proporcional de A, Z, como B, como A es a Z, así el cuadrado de A será al cuadrado de B, es decir que como la primera es a la tercera, así la (figura) construida sobre la primera es a la figura semejante y construida de manera semejante sobre la segunda [VI 19 Por.]. Pero como A es a Z, así el número Δ es al número E; entonces como el número Δ es al número E, así también la figura construida sobre la recta A[9] a la figura construida sobre la recta B. Q. E. D.

Proposición 7

Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número.

Sean A, B, magnitudes inconmensurables.

Digo que A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.



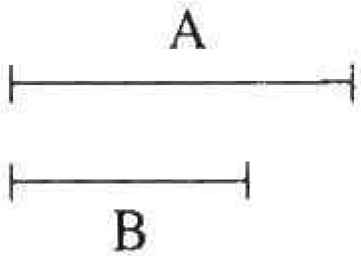
Pues, si A guarda con B la razón que un número guarda con un número, A será conmensurable con B [X 6]. Pero no lo es; por tanto, A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.

Por consiguiente, las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón..., etc.

Proposición 8

Si dos magnitudes no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán inconmensurables.

No guarden, pues, entre sí las dos magnitudes A, B la razón que un número guarda con un número.



Digo que las magnitudes A, B son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, A guardará con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Pero no la guarda. por tanto, las magnitudes A, B son inconmensurables.

Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.

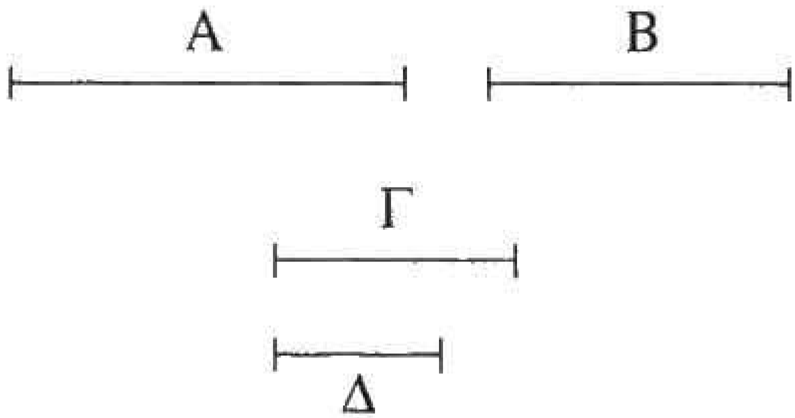
PROPOSICIÓN 9

Los cuadrados de rectas conmensurables en longitud guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y los cuadrados que guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tendrán también los lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados de las rectas inconmensurables en longitud no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y los cuadrados que no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tampoco tendrán los lados conmensurables en longitud.

Sean, pues, A, B conmensurables en longitud.

Digo que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues como A es conmensurable en longitud con B, entonces A guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Γ a Δ. Pues bien, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, porque las figuras semejantes guardan una razón duplicada de la de sus lados correspondientes [VI 20 Por.]; y dado que el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ, porque entre dos números cuadrados hay un número que es media proporcional, y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda con el lado [VIII 11]; luego como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ es al cuadrado de Δ.



Pero ahora, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, sea así el cuadrado de Γ al cuadrado de Δ.

Digo que A es conmensurable en longitud con B.

Pues, dado que, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ al de Δ, mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, y el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ, entonces, como A es a B, así Γ a Δ. Luego A guarda con B la razón que el número Γ guarda con el número Δ. Por tanto A es conmensurable en longitud con B [X 6].

Sea ahora A inconmensurable en longitud con B.

Digo que el cuadrado de A no guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues si el cuadrado de A guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, A será conmensurable con B. Pero no lo es; luego el cuadrado de A no guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

No guarde ahora el cuadrado de A con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Digo que A es inconmensurable en longitud con B.

Pues si A es conmensurable con B, el cuadrado de A guardará con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no la guarda; luego A no es conmensurable en longitud con B.

Por consiguiente, los cuadrados de (rectas) conmensurables en longitud, etc.[10].

Porisma:

Y a partir de lo demostrado quedará claro que las rectas conmensurables en longitud también lo son siempre en cuadrado, mientras que las conmensurables en cuadrado no lo son siempre en longitud[11].

LEMA

Se ha demostrado en los libros de aritmética que los números planos semejantes guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [VIII 26], y que si dos números guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, son números planos semejantes [VIII 26 conversa]. Y es evidente a partir de esto que los números planos no semejantes, es decir los que no tienen los lados proporcionales, no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; pues, si la guardan, serán planos semejantes; lo cual precisamente se ha supuesto que no; luego los números planos no semejantes no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado[12].

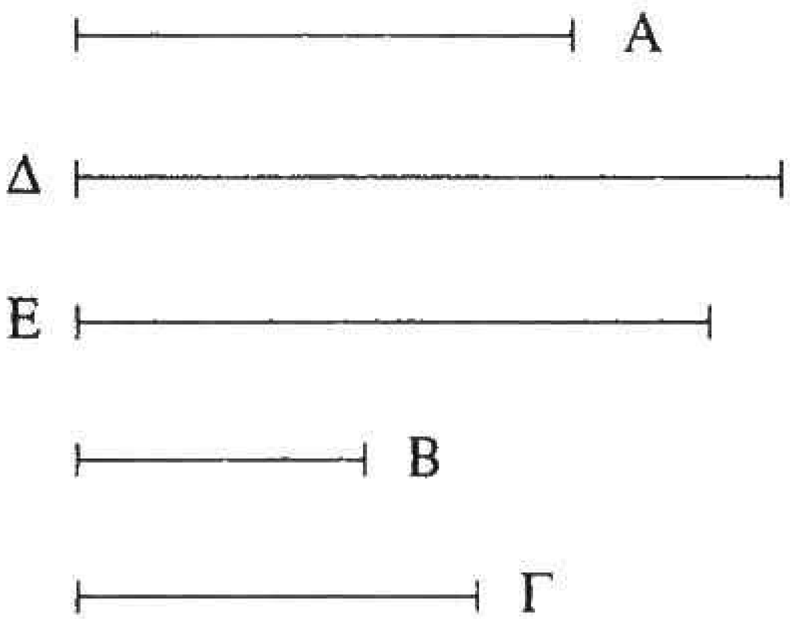
PROPOSICIÓN 10

Hallar dos rectas inconmensurables, una sólo en longitud, otra también en cuadrado, con una recta determinada.

Sea A la recta determinada.

Así pues, hay que hallar dos rectas inconmensurables, una sólo en longitud, otra también en cuadrado, con la recta determinada A.

Tómense, pues, dos números B, Γ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, es decir que no sean números planos semejantes y hágase de forma que, como B es a Γ, así el cuadrado de A al cuadrado de Δ, pues hemos aprendido (a hacerlo) [X 6 Por.]; entonces, el cuadrado de A es conmensurable con el cuadrado de Δ [X 6]. Ahora bien, dado que B no guarda con Γ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el cuadrado de Δ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con Δ [X 9].



Tómese la media proporcional E de A, Δ; entonces, como A es a Δ, así el cuadrado de A es al cuadrado de E [V Def. 9]. Pero A es inconmensurable en longitud con Δ; luego el cuadrado de A es también inconmensurable con el cuadrado de E [X 11]; por tanto A es inconmensurable en cuadrado con E.

Por consiguiente, se han hallado dos rectas inconmensurables, Δ, E, una, Δ, sólo en longitud y la otra, E, en cuadrado y también obviamente en longitud, con la recta determinada A[13].

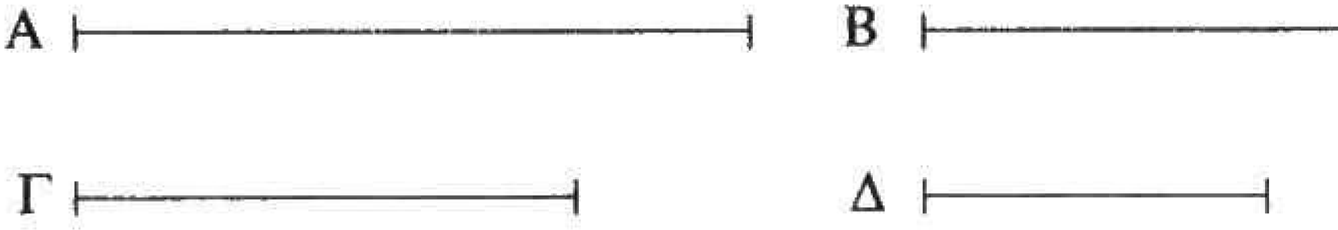
Proposición 11

Si cuatro magnitudes son proporcionales y la primera es conmensurable con la segunda, también la tercera será conmensurable con la cuarta, y si la primera es inconmensurable con la segunda, la tercera será también inconmensurable con la cuarta.

Sean A, B, Γ, Δ cuatro magnitudes proporcionales, es decir: como A es a B, así Γ a Δ, y sea A conmensurable con B.

Digo que Γ también será conmensurable con Δ.

Pues como A es conmensurable con B, entonces A guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Y como A es a B, así Γ a Δ. Entonces Γ guarda también con Δ la razón que un número guarda con un número; luego Γ es conmensurable con Δ [X 6].



Pero ahora sea A inconmensurable con B.

Digo que Γ también será inconmensurable con Δ.

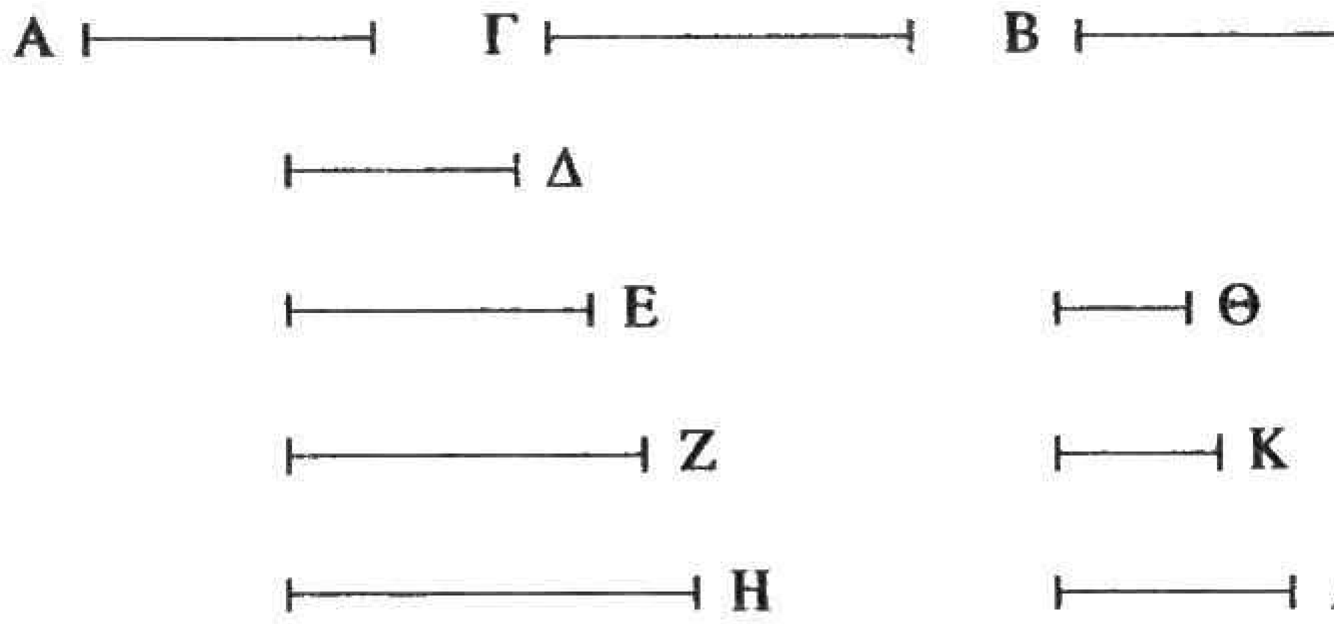
Pues como A es inconmensurable con B, entonces A no guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 7]. Y A es a B como Γ es a Δ. Entonces Γ tampoco guarda con Δ la razón que un número guarda con un número; luego Γ es inconmensurable con Δ [X 8].

Por consiguiente, si cuatro magnitudes..., etc.

Proposición 12

Las magnitudes conmensurables con una misma magnitud son también conmensurables entre sí.

Sea, pues, conmensurable cada una de las magnitudes A, B con la magnitud Γ.



Digo que A es también conmensurable con B.

Pues como A es conmensurable con Γ, entonces A guarda con Γ la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Δ a E. Puesto que a su vez Γ es conmensurable con B, entonces Γ guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Z a H. Y dadas cuantas razones se quiera, a saber, la de Δ a E y la de Z a H, tómense los números Θ, K, Λ sucesivamente en las razones dadas [VIII 4]; de modo que, como Δ es a E, así Θ a K, y como Z es a H, así K a Λ.

Así pues, dado que, como A es a Γ, así Δ a E, mientras que, como Δ es a E, así Θ a K, entonces como A es a Γ, así también Θ a K [V 11]. Y puesto que, como Γ es a B, así Z es a su vez a H, mientras que, como Z es a H, K es a Λ, entonces, como Γ es a B, así K a Λ [V 11]. Pero, como A es a Γ, así también Θ a K; entonces, por igualdad, como A es a B, así Θ a Λ [V 22]. Luego A guarda con B la razón que el número Θ guarda con el número Λ; por tanto A es conmensurable con B [X 6].

Por consiguiente, las (magnitudes) conmensurables con una misma magnitud son conmensurables entre sí. Q. E. D.

Proposición 13

Si hay dos magnitudes conmensurables y una de ellas es inconmensurable con otra magnitud cualquiera, también la restante será inconmensurable con ella.

Sean A, B dos magnitudes conmensurables y una de ellas, A, sea inconmensurable con otra magnitud cualquiera, Γ.

Digo que la restante, B, es también inconmensurable con Γ.

Pues si B es conmensurable con Γ, y A es también conmensurable con B, entonces A es conmensurable con Γ [X 12]. Pero es también inconmensurable; lo cual es imposible. Por tanto B no es conmensurable con Γ; luego es inconmensurable (con ella).

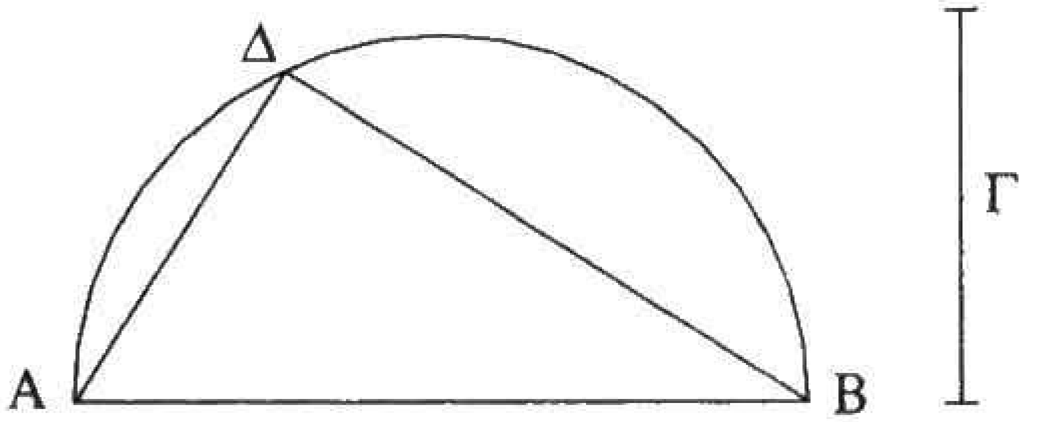
Por consiguiente, si dos magnitudes conmensurables..., etc.

LEMA

Dadas dos rectas desiguales hallar en cuánto el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor.

Sean AB, Γ las dos rectas desiguales dadas, de las cuales sea AB la mayor.

Así pues hay que hallar en cuánto es mayor el cuadrado de AB que el de Γ.



Descríbase sobre AB el semicírculo AΔB y adáptese a él la (recta) AΔ igual a Γ [IV 1] y trácese ΔB. Entonces está claro que el ángulo AΔB es recto [III 31] y que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de AΔ, es decir de Γ, en el cuadrado de ΔB [I 47].

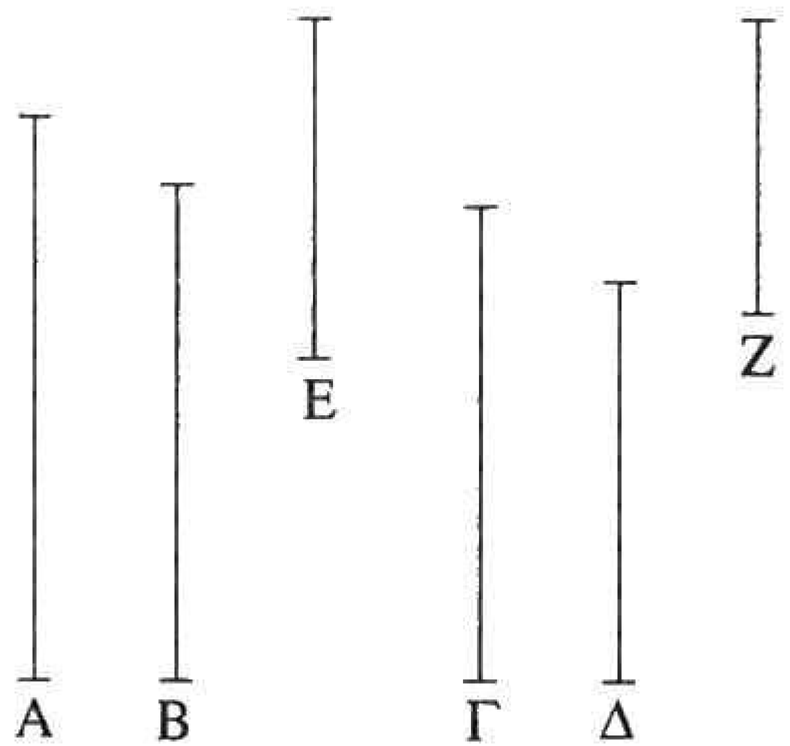
De manera semejante, dadas dos rectas, se hallará la recta cuyo cuadrado es igual a los cuadrados de ellas, de la siguiente manera:

Sean AΔ, ΔB las dos rectas dadas y sea lo requerido hallar la recta cuyo cuadrado es igual a los cuadrados de ellas. Pónganse pues de modo que sea recto el ángulo comprendido por AΔ, ΔB, y trácese AB; está claro de nuevo que AB es la (recta) cuyo cuadrado es igual a los de AΔ, ΔB [I 47]. Q. E. D.[14].

PROPOSICIÓN 14

Si cuatro rectas son proporcionales, y el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta conmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una (recta) conmensurable con la tercera. Y si el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta inconmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la tercera).

Sean A, B, Γ, Δ cuatro rectas proporcionales (tales que) como A es a B, así Γ a Δ, y sea el cuadrado de A mayor que el de B en el cuadrado de E, y el cuadrado de Γ sea mayor que el de Δ en el cuadrado de Z.



Digo que si A es conmensurable con E, Γ será también conmensurable con Z, pero si A es inconmensurable con E, Γ será también inconmensurable con Z.

Pues, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así también el cuadrado de Γ al de Δ [VI 22]. Pero los cuadrados de E, B son iguales al cuadrado de A, y los cuadrados de Δ, Z son iguales al cuadrado de Γ. Entonces, como los cuadrados de E, B son al cuadrado de B, así los cuadrados de Δ, Z al cuadrado de Δ; luego, por separación, como el cuadrado de E es al cuadrado de B, así el cuadrado de Z al cuadrado de Δ [V 17]; por tanto, como E es a B, así Z a Δ [VI 22]; entonces, por inversión, como B es a E, así Δ a Z. Pero como A es a B, así también Γ a Δ;

luego, por igualdad, como A es a E, así Γ a Z [V 22]. Ahora bien, si A es conmensurable con E, Γ es también conmensurable con Z, pero si A es inconmensurable con E, Γ es también inconmensurable con Z [X 11].

Por consiguiente..., etc.[15].

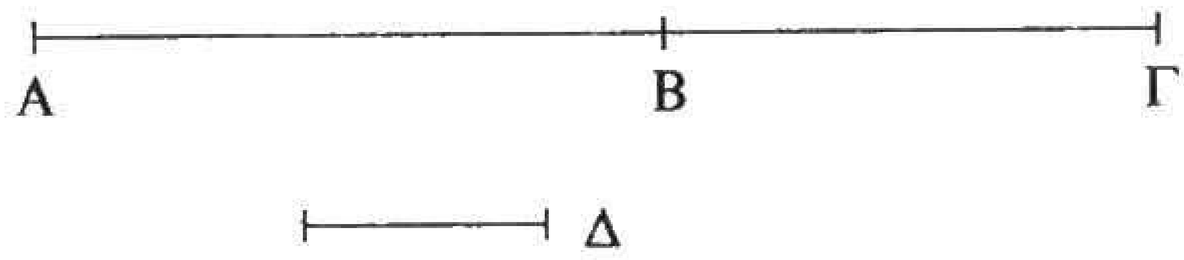
Proposición 15

Si se suman dos magnitudes conmensurables, la (magnitud) total también será conmensurable con cada una de ellas; y si la (magnitud) total es conmensurable con cada una de ellas, también las magnitudes iniciales serán conmensurables.

Súmense, pues, las dos magnitudes conmensurables AB, BΓ.

Digo que la (magnitud) total AΓ es también conmensurable con cada una de las (magnitudes) AB, BΓ.

Pues como AB, BΓ son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud) y sea Δ. Así pues, dado que Δ mide a AB, BΓ, medirá también a la magnitud total AΓ. Pero mide también a AB, BΓ. Entonces Δ mide a AB, BΓ, AΓ. Luego AΓ es conmensurable con cada una de las magnitudes AB, BΓ [X Def. 1].



Pero ahora sea AΓ conmensurable con AB.

Digo que AB, BΓ son también conmensurables.

Pues como AΓ, AB son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud) y sea Δ. Así pues, dado que Δ mide a ΓA, AB, entonces medirá también a la magnitud restante BΓ. Pero también mide a AB; entonces Δ medirá a AB, BΓ. Luego AB, BΓ son conmensurables [X Def. 1]

Por consiguiente, si dos magnitudes..., etc.

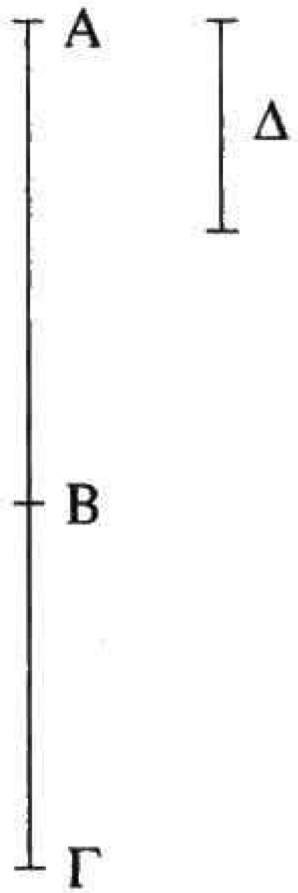
Proposición 16

Si se suman dos magnitudes inconmensurables, la magnitud total también será inconmensurable con cada una de ellas; y si la magnitud total es inconmensurable con una de ellas, las magnitudes iniciales serán también inconmensurables.

Súmense, pues, las dos magnitudes inconmensurables AB, BΓ.

Digo que la (magnitud) total ΑΓ es inconmensurable con cada una de las (magnitudes) ΑΒ, ΒΓ.

Pues si ΓΑ, ΑΒ no son inconmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud), si es posible, y sea Δ. Así pues, como Δ mide a ΓΑ, ΑΒ, entonces, medirá también a la magnitud restante ΒΓ. Pero mide también a ΑΒ; entonces Δ mide a ΑΒ, ΒΓ. Luego ΑΒ, ΒΓ son conmensurables; pero se ha supuesto que son inconmensurables; lo cual es imposible. Por tanto, ninguna magnitud medirá a ΓΑ, ΑΒ; luego ΓΑ, ΑΒ son inconmensurables [X Def. 1]. De manera semejante demostraríamos que ΑΓ, ΓΒ son inconmensurables. Por tanto ΑΓ es inconmensurable con cada una de las magnitudes ΑΒ, ΒΓ.



Pero ahora sea ΑΓ inconmensurable con una de las (magnitudes) ΑΒ, ΒΓ. Séalo en primer lugar con ΑΒ.

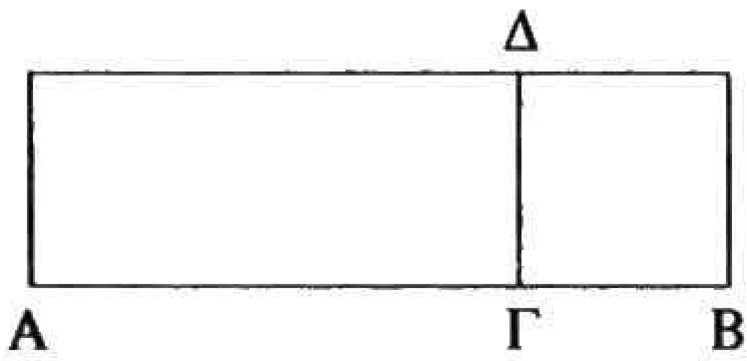
Digo que ΑΒ, ΒΓ son también inconmensurables. Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Mídalas (una magnitud) y sea Δ. Así pues, como Δ mide a ΑΒ, ΒΓ, entonces, medirá también a la (magnitud) total ΑΓ. Pero mide también a ΑΒ; entonces Δ mide a ΓΑ, ΑΒ. Luego ΓΑ, ΑΒ son conmensurables; pero se ha supuesto que son inconmensurables; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a ΑΒ, ΒΓ; por tanto ΑΒ, ΒΓ son inconmensurables.

Por consiguiente, si dos magnitudes..., etc.

LEMA

Si se aplica a una recta un paralelogramo deficiente en la figura de un cuadrado, el (paralelogramo) aplicado es igual al (rectángulo) producido por los segmentos de recta que resultan de la aplicación.

Aplíquese, pues, a la recta AB, el paralelogramo AΔ deficiente en la figura de un cuadrado, ΔB.



Digo que AΔ es igual al rectángulo comprendido por AΓ, ΓB.

Y esto queda claro por sí mismo: pues como ΔB es un cuadrado, ΔΓ es igual a ΓB, y AΔ es el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓΔ, es decir, el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB.

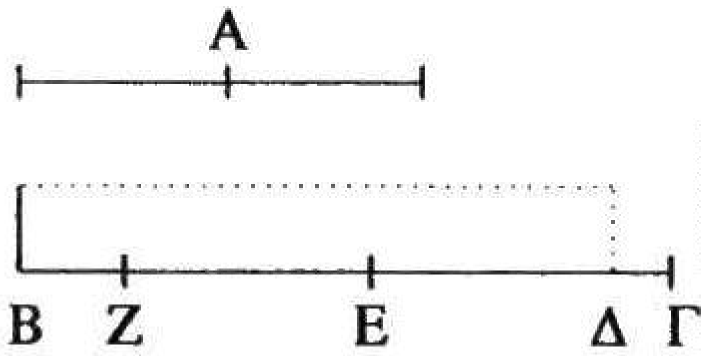
Por consiguiente, si se aplica una recta... etc.[16].

PROPOSICIÓN 17

Si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) conmensurables en longitud, el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor), y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables en longitud.

Sean A, BΓ dos rectas desiguales, de las cuales BΓ sea la mayor, y aplíquese a BΓ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, A, es decir, al (cuadrado) de la mitad de A, y deficiente en la figura de un cuadrado. Y sea el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ [Lema]. Y sea BΔ conmensurable en longitud con ΔΓ.

Digo que el cuadrado de BΓ es mayor que el de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (BΓ).



Divídase, pues, ΒΓ en dos partes iguales por el (punto) Ε, y hágase ΕΖ igual a ΔΕ. Entonces, la restante ΔΓ es igual a ΒΖ. Y dado que la recta ΒΓ ha sido dividida en partes iguales por el (punto) Ε y en partes desiguales por el (punto) Δ, entonces el rectángulo comprendido por ΒΔ, ΔΓ junto con el cuadrado de ΕΔ es igual al cuadrado de ΕΓ [II 5]; y (lo mismo vale) para sus cuádruples; entonces el cuádruple del (rectángulo comprendido) por ΒΔ, ΔΓ junto con el cuádruple del cuadrado de ΔΕ es igual al cuádruple del cuadrado de ΕΓ. Pero el cuadrado de Α es igual al cuádruple del rectángulo comprendido por ΒΔ, ΔΓ, mientras que el cuadrado de ΔΖ es igual al cuádruple del cuadrado de ΔΕ: porque ΔΖ es el doble de ΔΕ. Pero el cuadrado de ΒΓ es igual al cuádruple del cuadrado de ΕΓ: porque ΒΓ es a su vez el doble de ΓΕ. Luego los cuadrados de las rectas Α, ΔΖ son iguales al cuadrado de ΒΓ; de modo que el cuadrado de ΒΓ es mayor que el cuadrado de Α en el cuadrado de ΔΖ; luego el cuadrado de ΒΓ es mayor que el de Α en el cuadrado de ΔΖ[17].

Hay que demostrar que ΒΓ es además conmensurable con ΔΖ. Pues como ΒΔ es conmensurable en longitud con ΔΓ, entonces ΒΓ es conmensurable en longitud con ΓΔ [X 15]. Pero ΓΔ es conmensurable en longitud con ΓΔ, ΒΖ: porque ΓΔ es igual a ΒΖ [X 6]. Luego ΒΓ es conmensurable en longitud con ΒΖ, ΓΔ [X 12]; de modo que ΒΓ también es conmensurable en longitud con la restante ΖΔ [X 15]; luego el cuadrado de ΒΓ es mayor que el cuadrado de Α en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΒΓ).

Pues bien, sea mayor el cuadrado de ΒΓ que el cuadrado de Α en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΒΓ) y aplíquese a ΒΓ un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) de Α y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el rectángulo comprendido por ΒΔ, ΔΓ.

Hay que demostrar que ΒΔ es conmensurable en longitud con ΔΓ.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de ΒΓ es mayor que el de Α en el cuadrado de ΖΔ. Pero el cuadrado de ΒΓ es mayor que el de Α en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΒΓ). Entonces ΒΓ es conmensurable en longitud con ΖΔ; de modo que ΒΓ también es conmensurable en longitud con el resto, a saber, la suma de ΒΖ, ΔΓ [X 15]. Pero la suma de ΒΖ, ΔΓ es conmensurable con ΔΓ [X 6]. De modo que ΒΓ es también conmensurable en longitud con ΔΓ [X 15].

Por consiguiente, si hay dos rectas desiguales..., etc.

Proposición 18

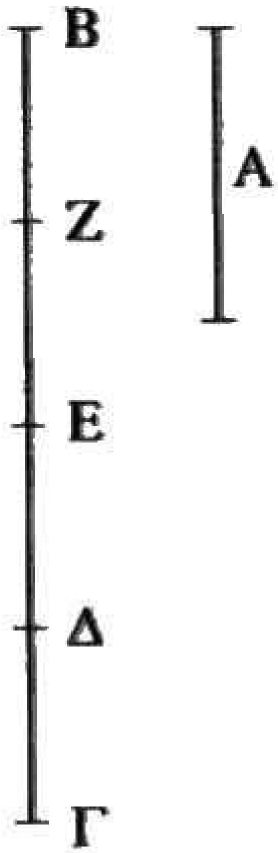
Si hay dos rectas desiguales y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) inconmensurables, el cuadrado de la mayor será mayor que el cuadrado de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (la mayor) y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) inconmensurables.

Sean Α, ΒΓ dos rectas desiguales, de las cuales sea ΒΓ la mayor, y aplíquese a ΒΓ un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, Α, y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo) ΒΔΓ [Cf. lema anterior a X 17], y sea ΒΔ inconmensurable en longitud con ΔΓ.

Digo que el cuadrado de ΒΓ es mayor que el cuadrado de Α en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (ΒΓ).

Pues, siguiendo la misma construcción del (teorema) anterior, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de ΒΓ es mayor que el de Α en el (cuadrado) de ΖΔ.

Hay que demostrar que ΒΓ es inconmensurable en longitud con ΔΖ. Pues como ΒΔ es inconmensurable en longitud con ΔΓ, entonces ΒΓ es también inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 16]. Pero ΔΓ es conmensurable con la suma de ΒΖ, ΔΓ [X 6]; entonces ΒΓ es inconmensurable con la suma de ΒΖ, ΔΖ [X 13]. De modo que ΒΓ es también inconmensurable en longitud con la restante ΖΔ [X 16]. Y el cuadrado de ΒΓ es mayor que el cuadrado de Α en el (cuadrado) de ΖΔ; luego el cuadrado de ΒΓ es mayor que el cuadrado de Α en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΒΓ).



Sea a su vez el cuadrado de ΒΓ mayor que el cuadrado de Α en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΒΓ) y aplíquese a ΒΓ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de Α y deficiente en la figura de un cuadrado y sea el (rectángulo comprendido) por ΒΔ, ΔΓ.

Hay que demostrar que ΒΔ es inconmensurable en longitud con ΔΓ.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de ΒΓ es mayor que el cuadrado de Α en el (cuadrado) de ΖΔ. Pero el cuadrado de ΒΓ es mayor que el cuadrado de Α en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΒΓ). Luego ΒΓ es inconmensurable en longitud con ΖΔ; de modo que ΒΓ es inconmensurable con el resto, es decir, con la suma de ΒΖ, ΔΓ [X 16]. Pero la suma de ΒΖ, ΔΓ es conmensurable en longitud con ΔΓ [X 6]; luego ΒΓ es inconmensurable en longitud con ΔΓ [X 13]; de modo que, por separación, ΒΔ es inconmensurable en longitud con ΔΓ [X 16]

Por consiguiente, si hay dos rectas..., etc.

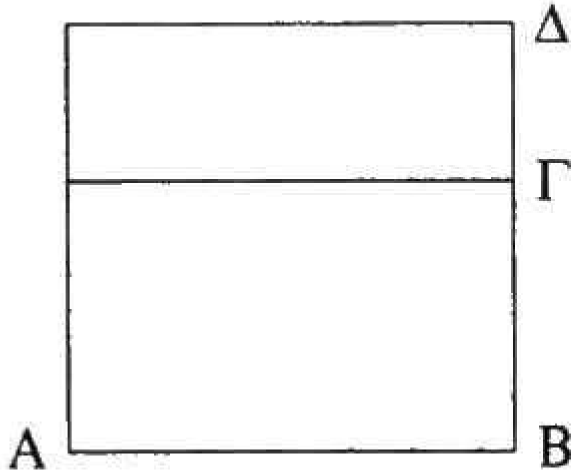
LEMA

Puesto que queda demostrado que las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado, mientras que las que lo son en cuadrado no lo son siempre también en longitud, sino que pueden ser, en efecto, conmensurables o inconmensurables en longitud, queda claro que, si una recta es conmensurable en longitud con una recta expresable[18] determinada, se llama expresable y conmensurable con ella no sólo en longitud sino también en cuadrado, porque las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado. Ahora bien, si una recta es conmensurable en cuadrado con una (recta) expresable determinada, entonces, si lo es también en longitud, se dice que es expresable y conmensurable con ella en longitud y en cuadrado; pero si una recta, siendo a su vez conmensurable en cuadrado con otra recta expresable determinada, es inconmensurable en longitud con ella, en este caso también se llama expresable pero conmensurable sólo en cuadrado[19].

Proposición 19

El rectángulo comprendido por rectas expresables conmensurables en longitud, según alguna de las formas antedichas es expresable[20].

Pues sea comprendido el rectángulo ΑΓ por las rectas expresables y conmensurables en longitud ΑΒ, ΒΓ.



Digo que ΑΓ es expresable.

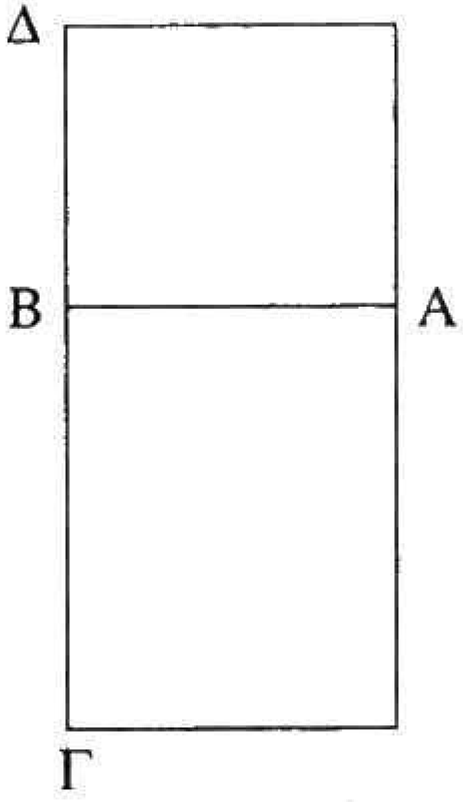
Pues constrúyase sobre ΑΒ el cuadrado de ΑΔ. Entonces ΑΔ es expresable [X Def. 4]. Y como ΑΒ es conmensurable en longitud con ΒΓ, mientras que ΑΒ es igual a ΒΔ, entonces ΒΔ es conmensurable en longitud con ΒΓ. Y como ΒΔ es a ΒΓ, así ΔΑ a ΑΓ [VI 1]. Luego ΔΑ es conmensurable con ΑΓ [X 11]. Pero ΔΑ es expresable; luego ΑΓ es también expresable [X Def. 4].

Por consiguiente, el rectángulo comprendido..., etc.

Proposición 20

Si se aplica un (área) expresable a una (recta) expresable, produce como anchura una (recta) expresable y conmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado.

Aplíquese, pues, el (área) expresable ΑΓ a la recta ΑΒ expresable una vez más según alguna de las formas antedichas, de modo que produzca como anchura ΒΓ.



Digo que ΒΓ es expresable y conmensurable en longitud con ΒΑ.

Pues constrúyase sobre ΑΒ el cuadrado de ΑΔ; entonces ΑΔ es expresable [X Def. 4]. Pero también lo es ΑΓ; luego ΔΑ es conmensurable con ΑΓ. Ahora bien, como ΔΑ es a ΑΓ, así ΔΒ a ΒΓ [VI 11]. Por tanto ΔΒ es conmensurable también con ΒΓ [X 11]; pero ΔΒ es igual a ΒΑ. Luego ΑΒ es conmensurable con ΒΓ. Ahora bien, ΑΒ es expresable; por tanto, ΒΓ es expresable y conmensurable en longitud con ΑΒ.

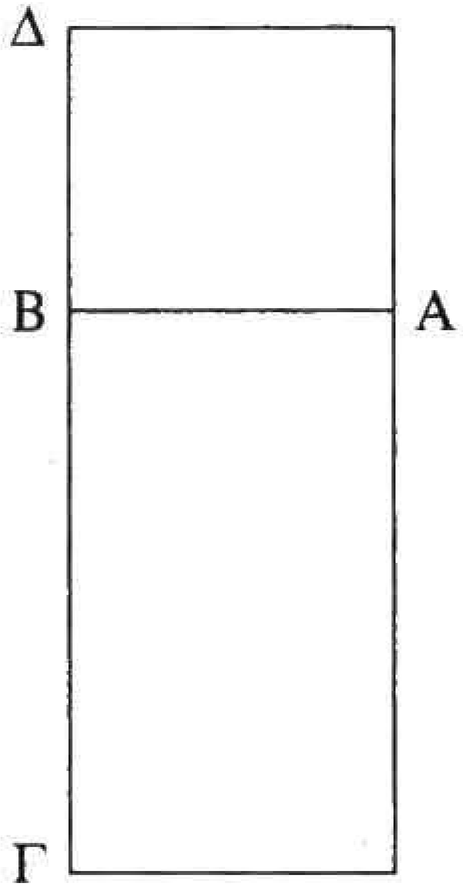
Por consiguiente, si se aplica un (área) expresable a una recta expresable..., etc.

Proposición 21

El rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado no es racionalmente expresable[21] *y el lado del cuadrado igual a él tampoco es racionalmente expresable, llámese (este último) medial.*

Sea, pues, comprendido el rectángulo AΓ por las rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado AB, BΓ.

Digo que AΓ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a él tampoco es expresable, y llámese medial.



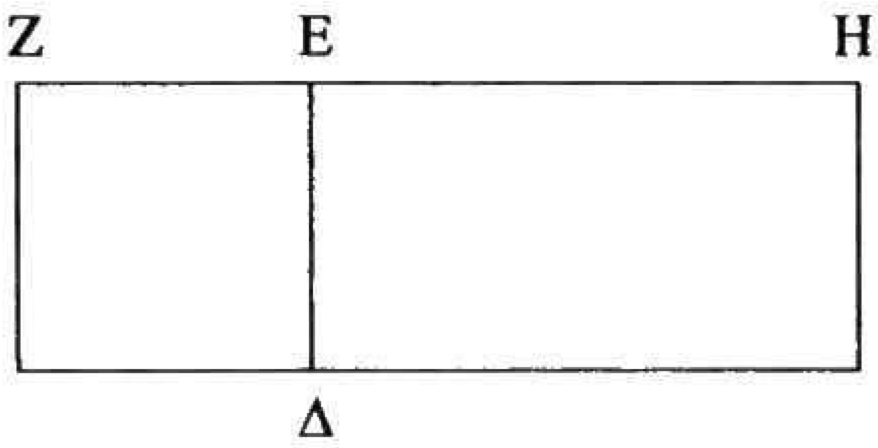
Pues constrúyase sobre AB el cuadrado AΔ; entonces AΔ es expresable [X Def. 4]. Y como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, porque se ha supuesto que es conmensurable sólo en cuadrado, mientras que AB es igual a BΔ, entonces ΔB es inconmensurable en longitud con BΓ. Ahora bien, como ΔB es a BΓ, así AΔ es a AΓ [VI 1]; luego ΔA es inconmensurable con AΓ [X 11]. Pero ΔA es expresable; luego AΓ no es expresable; de modo que el lado del cuadrado igual a AΓ tampoco es expresable, llámese medial. Q. E. D.[22].

LEMA

Si hay dos rectas, como la primera es a la segunda, así el cuadrado de la primera al rectángulo comprendido por las dos rectas.

Sean ZE, EH dos rectas.

Digo que como ZE es a EH, así el (cuadrado) de ZE al (rectángulo comprendido) por ZE, EH.



Constrúyase, pues, sobre ZE, el cuadrado ΔZ, y complétese el (paralelogramo) HΔ. Así pues, dado que, como ZE es a EH, así ZΔ a ΔH [VI 1], y ZΔ es el (cuadrado) de ZE, mientras que ΔH es el (rectángulo comprendido) por ΔE, EH, es decir por ZE, EH, entonces como ZE es a EH, así el (cuadrado) de ZE al (rectángulo comprendido) por ZE, EH. De manera semejante, como el (rectángulo comprendido) por HE, HZ es al (cuadrado) de EZ, es decir, como HΔ es a ZΔ, así es HE a EZ. Q. E. D.[23].

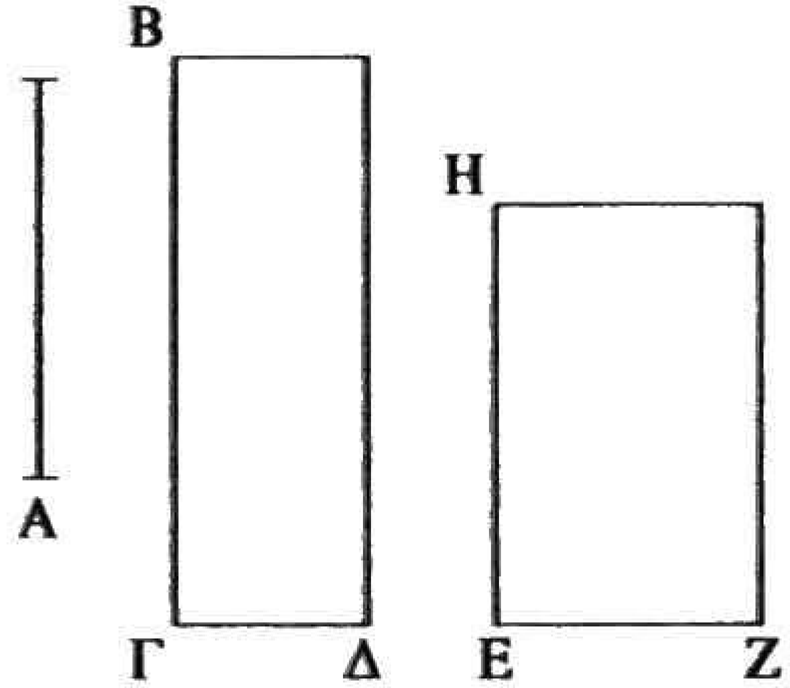
Proposición 22

El (cuadrado) de una (recta) medial, si se aplica a una recta expresable, produce una anchura expresable e inconmensurable en longitud con aquella a la que se aplica.

Sea A la (recta) medial y ΓB la expresable, y aplíquese a BΓ el área rectangular BΔ igual al cuadrado de A, produciendo la anchura ΓΔ.

Digo que ΓΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓB.

Pues como A es una medial, su cuadrado es igual a un área comprendida por rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 21]. Sea su cuadrado igual a HZ. Pero su cuadrado también es igual a BΔ; entonces BΔ es igual a HZ. Pero también son equiangulares; y en los paralelogramos iguales y equiangulares, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados [VI 14]. Luego, proporcionalmente, como BΓ es a EH, así EZ a ΓΔ. Entonces, como el (cuadrado) de BΓ es al (cuadrado) de EH, así el (cuadrado) de EZ es al (cuadrado) de ΓΔ [VI 22]. Ahora bien, el (cuadrado) de ΓB es conmensurable con el de EH; porque cada uno de ellos es expresable; luego el (cuadrado) de EZ es también conmensurable con el (cuadrado) de ΓΔ [X 11]. Pero el (cuadrado) de EZ es expresable; luego el cuadrado de ΓΔ es también expresable [X Def. 4]; por tanto, ΓΔ es expresable. Ahora bien, como EZ es inconmensurable en longitud con EH, porque son conmensurables sólo en cuadrado; y como EZ es a EH, así el (cuadrado) de EZ al (rectángulo comprendido) por ZE, EH [lema], entonces el (cuadrado) de EZ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ZE, EH. Pero el (cuadrado) de ΓΔ es conmensurable con el cuadrado de EZ; porque son expresables en cuadrado; y el (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓΒ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΖΕ, ΕΗ, porque son iguales al (cuadrado) de Α; luego el (cuadrado) de ΓΔ es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓΒ [X 13]. Pero, como el (cuadrado) de ΓΔ es al (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓΒ, así ΔΓ es a ΓΒ [lema]. Por tanto, ΔΓ es inconmensurable en longitud con ΓΒ [X 11]. Por consiguiente, ΓΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΒ. Q. E. D.



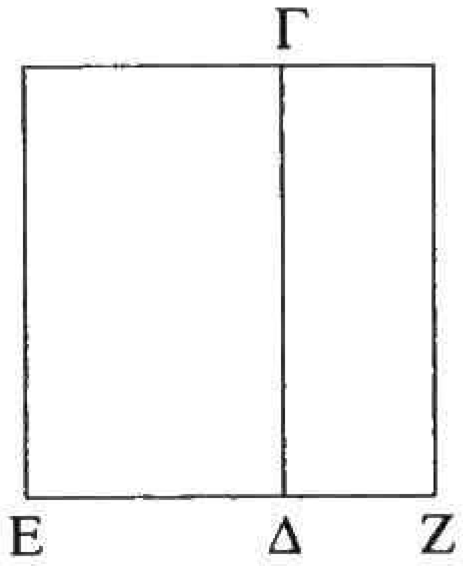
PROPOSICIÓN 23

La recta conmensurable con una (recta) medial es medial.

Sea Α una recta medial, y sea Β conmensurable con Α.

Digo que Β es también medial.

Póngase, pues, la recta expresable ΓΔ, y aplíquese a ΓΔ un área rectangular ΓΕ igual al cuadrado de Α que produzca la anchura ΕΔ; entonces ΕΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Pero aplíquese a ΓΔ un área rectangular, ΓΖ, igual al (cuadrado) de Β que produzca la anchura ΔΖ. Entonces, dado que Α es conmensurable con Β, el (cuadrado) de Α es también conmensurable con el (cuadrado) de Β. Pero ΕΓ es igual al (cuadrado) de Α, mientras que ΓΖ es igual al (cuadrado) de Β; por tanto, ΕΓ es conmensurable con ΓΖ. Ahora bien, como ΕΓ es a ΓΖ, así ΕΔ a ΔΖ [VI 1]; entonces ΕΔ es conmensurable en longitud con ΔΖ [X 11]; pero ΕΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔΓ; entonces ΔΓ es expresable [X Def. 3] e inconmensurable en longitud con ΔΓ [X 13]; luego ΓΔ, ΔΖ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Pero la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado es medial [X 21]. Luego la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, ΔZ es medial; y el cuadrado de B es igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, ΔZ. Por consiguiente, B es medial.



Porisma:

A partir de esto queda claro que un (área) conmensurable con un área medial es medial.

De acuerdo con lo que se ha dicho acerca de las (rectas) expresablas [Lema siguiente a X 18] se sigue, en lo que se refiere a las mediales, que la recta conmensurable en longitud con una medial se llama medial y es conmensurable con ella no sólo en longitud sino también en cuadrado, porque, en general, las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado. Pero si una recta es conmensurable en cuadrado con una medial, y si lo es también en longitud, en este caso se llaman también mediales y conmensurables en longitud y en cuadrado, pero si sólo lo son en cuadrado, se llaman mediales conmensurables sólo en cuadrado[24].

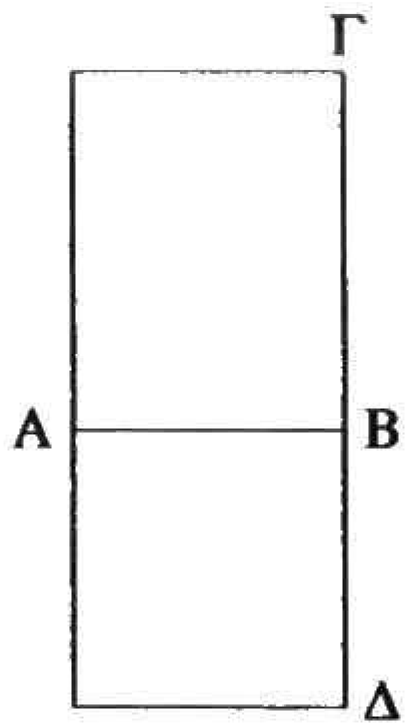
Proposición 24

El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud según alguna de las formas antedichas[25]*, es medial.*

Sea pues comprendido el rectángulo AΓ por las rectas mediales conmensurables en longitud AB, BΓ.

Digo que el (rectángulo) AΓ es medial.

Pues constrúyase sobre AB el cuadrado AΔ; entonces AΔ es medial. Y puesto que AB es conmensurable en longitud con BΓ, mientras que AB es igual a BΔ, entonces ΔB también es conmensurable en longitud con BΓ; de modo que ΔA es conmensurable con AΓ [VI 1, X 11]. Pero ΔA es medial. Por consiguiente, AΓ también es medial [X 23 Por.]. Q. E. D.

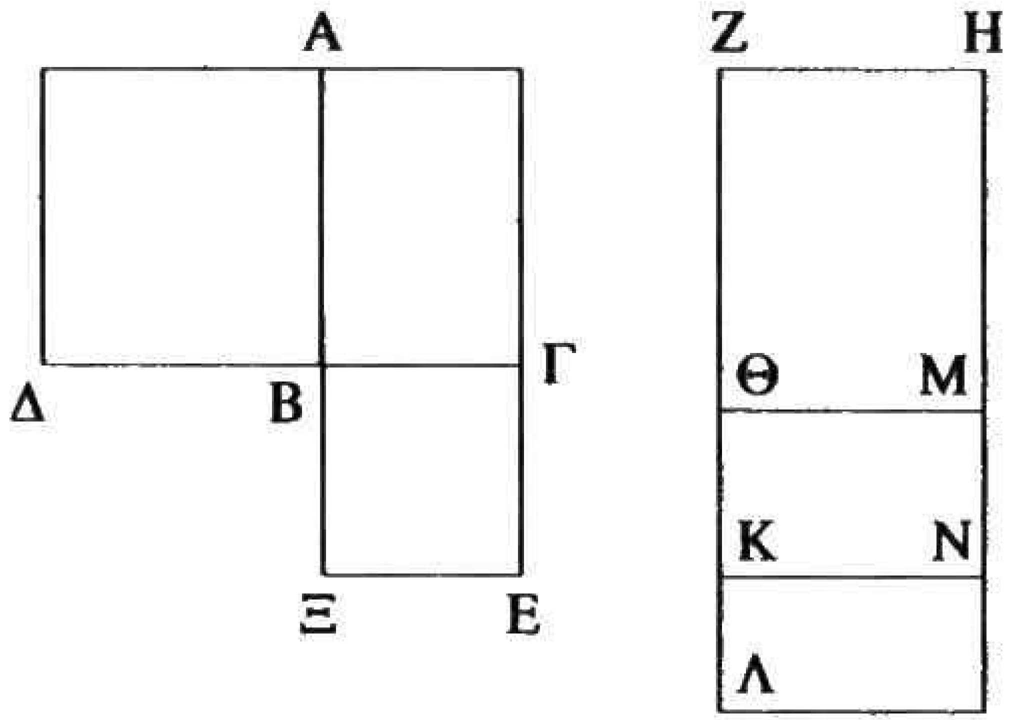


Proposición 25

El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado o es expresable o es medial.

Sea, pues, comprendido el rectángulo AΓ por las rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado, AB, BΓ.

Digo que AΓ o es expresable o es medial.



Pues constrúyanse sobre AB, BΓ los cuadrados AΔ, BE; entonces cada uno de los (cuadrados) AΔ, BE son mediales.

Póngase la recta expresable ZH, y aplíquese a la (recta) ZH el paralelogramo rectangular HΘ igual a AΔ de modo que produzca la anchura ZΘ; aplíquese, por otra parte a ΘM el paralelogramo rectangular MK igual a AΓ de modo que produzca la anchura ΘK, y además aplíquese a KN, de manera semejante, el rectángulo NΛ igual a BE, de modo que produzca la anchura KΛ. Entonces ZΘ, ΘK, KΛ están en línea recta. Así pues, dado que cada uno de los (cuadrados) AΔ, BE es medial, y AΔ es igual a HΘ, y BE a NΛ, entonces, cada uno de los (rectángulos) HΘ, NΛ también es medial. Y se han aplicado a la recta expresable ZH; luego cada una de las (rectas) ZΘ, KΛ es expresable e inconmensurable en longitud con ZH [X 22]. Y puesto que AΔ es conmensurable con BE, entonces HΘ es conmensurable con NΛ. Y como HΘ es a NΛ, así la (recta) ZΘ a la (recta) KΛ [VI 1]; entonces la (recta) ZΘ es conmensurable en longitud con la (recta) KΛ [X 11]. Luego ZΘ, KΛ son expresables y conmensurables en longitud; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ZΘ, KΛ es expresable [X 19]. Y dado que ΔB es igual a BA, y ΞB a BΓ, entonces, como ΔB es a BΓ, así AB a BE y, por tanto, como ΔB es a BΓ, así ΔA a AΓ [VI 1], y como AB es a BΞ, así AΓ a ΓΞ [VI 1]; entonces, como ΔA es a AΓ, así AΓ a ΓΞ. Pero AΔ es igual a HΘ, AΓ a MK, y ΓΞ a NΛ; entonces, como HΘ es a MK, así MK a NΛ; luego, como ZΘ es a ΘK, así también ΘK a KΛ [VI 1, V 11]; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ZΘ, KΛ es igual al (cuadrado) de ΘK [VI 17]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ZΘ, KΛ es expresable; entonces el (cuadrado) de ΘK es también expresable; luego ΘK es expresable. Y si es conmensurable en longitud con ZH, entonces ΘN es expresable; pero si es inconmensurable en longitud con ZH, KΘ, ΘM son expresables y conmensurables sólo en cuadrado, y entonces ΘN es medial

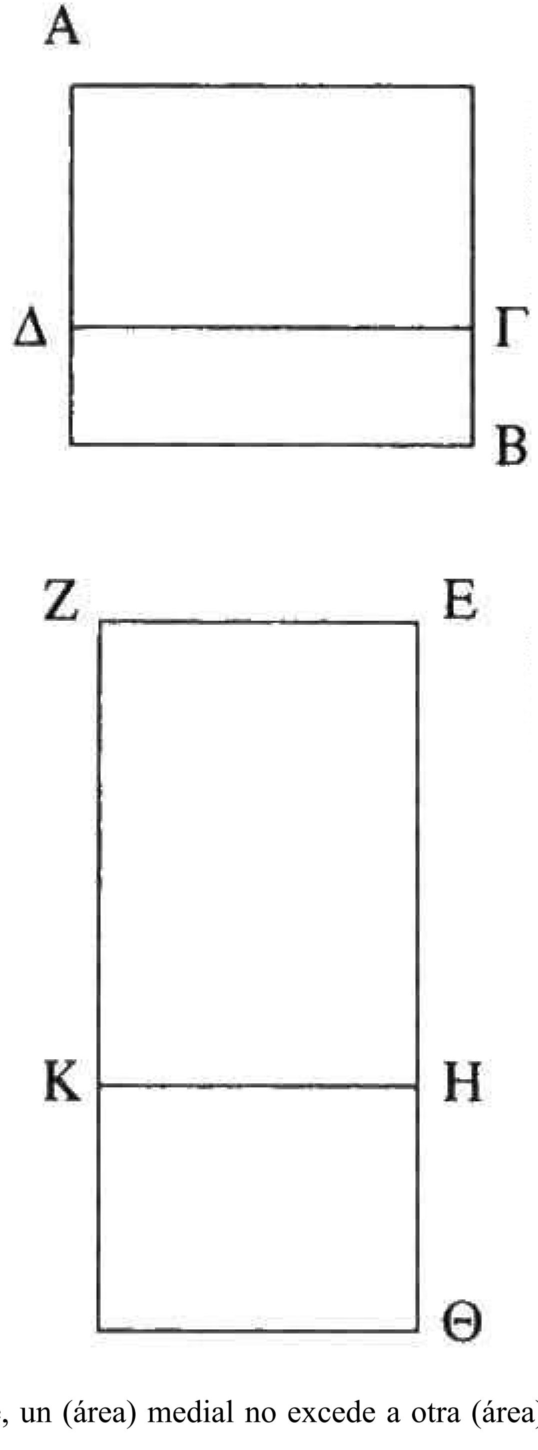
[X 21]; por tanto ΘN o es expresable o es medial. Pero ΘN es igual a AΓ; luego AΓ o es expresable o es medial.

Por consiguiente, si el (rectángulo) comprendido por (rectas) conmensurables sólo en cuadrado..., etc.

Proposición 26

Un (área) medial no excede a otra medial en un (área) expresable.

Pues, si es posible, exceda el (área) AB al (área) medial AΓ en el (área) expresable ΔB, y póngase la recta expresable EZ, y aplíquese a EZ el paralelogramo rectángulo ZΘ igual a AB de modo que produzca la anchura EΘ, y quítese el (rectángulo) ZH igual a AΓ; entonces el resto BΔ es igual al resto KΘ. Pero ΔB es expresable; por tanto KΘ también es expresable. Así pues, dado que cada uno de los (rectángulos) AB, AΓ es medial, y AB es igual a ZΘ, mientras que AΓ es igual a ZH, entonces cada uno de los (rectángulos) ZΘ, ZH es también medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable EZ; entonces cada una de las (rectas) ΘE, EH es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Ahora bien, puesto que ΔB es expresable y es igual a KΘ; entonces KΘ, es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ; luego HΘ es también expresable y conmensurable en longitud con EZ [X 20]. Pero EH es también expresable e inconmensurable en longitud con EZ; entonces EH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 13]. Ahora bien, como EH es a HΘ, así el (cuadrado) de EH es al (rectángulo comprendido) por EH, HΘ; entonces el (cuadrado) de EH es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ [X 11]. Pero los cuadrados de EH, HΘ son conmensurables con el (cuadrado) de EH, porque ambos son expresables; pero dos veces el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ, porque es el doble que él [X 6]; por tanto, los cuadrados de EH, HΘ son inconmensurables con dos veces el (rectángulo) comprendido por EH, HΘ [X 13]; luego, tanto la suma de los (cuadrados) de EH, HΘ como dos veces el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ, que es precisamente el cuadrado de EΘ [II 4], es inconmensurable con los (cuadrados) de EH, HΘ [X 16]. Pero los (cuadrados) de EH, HΘ son expresables; luego el (cuadrado) de EΘ no es expresable [X Def. 4]. Por tanto, EΘ no es expresable. Pero también es expresable; lo cual es imposible.



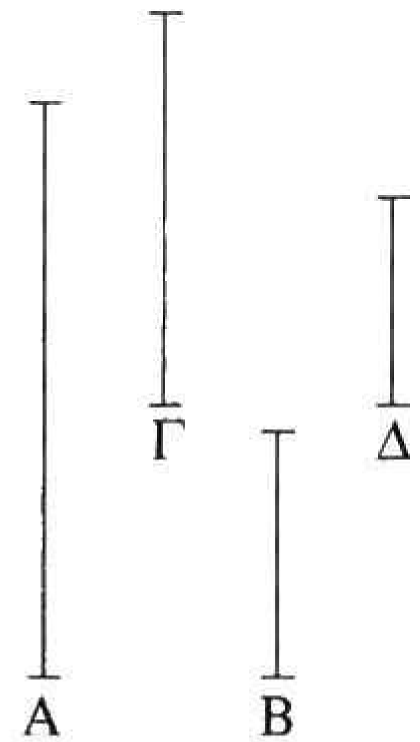
Por consiguiente, un (área) medial no excede a otra (área) medial en un (área) expresable. Q. E. D.

Proposición 27

Hallar rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Pónganse dos rectas, A, B, expresables conmensurables sólo en cuadrado, y tómese la media proporcional, Γ, de A, B, y, como A es a B, sea así Γ a Δ [VI 21].

Y puesto que A, B son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el (rectángulo comprendido) por A, B, es decir, el cuadrado de Γ [VI 17] es medial [X 21]. Entonces Γ es medial. Y puesto que, como A es a B, Γ es a Δ, y A, B son conmensurables sólo en cuadrado, entonces Γ, Δ son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Ahora bien, Γ es medial, luego también Δ es medial. Por tanto, Γ, Δ son mediales y conmensurables sólo en cuadrado.



Digo que también comprenden un rectángulo expresable.

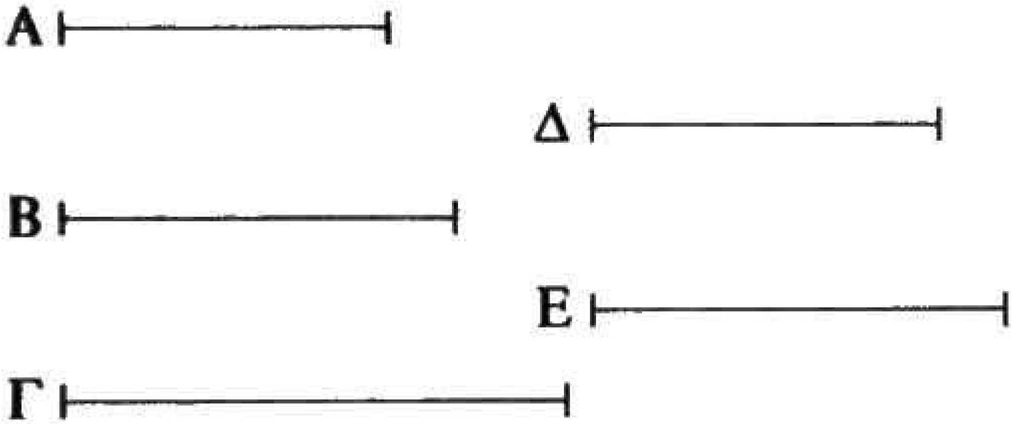
Pues, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces, por alternancia, como A es a Γ, B es a Δ [V 16]. Pero como A es a Γ, B es a Δ [V 16]. Pero como A es a Γ, Γ es a B; entonces, como Γ es a B, así B a Δ; luego el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es igual al cuadrado de B. Pero el cuadrado de B es expresable; por tanto el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es también expresable.

Por consiguiente, se han hallado rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable. Q. E. D.

Proposición 28

Hallar (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial.

Pónganse las (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado A, B, Γ y tómese la media proporcional Δ de A, B [VI 13], y como B es a Γ, sea así Δ a E [VI 12].



Puesto que A, B son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el (rectángulo comprendido) por A, B, es decir el (cuadrado) de Δ [VI 17] es medial, luego Δ es medial [X 21]. Y puesto que B, Γ son conmensurables sólo en cuadrado, y como B es a Γ, Δ es a E, entonces Δ, E son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero Δ es medial; entonces E es también medial [X 23]. Luego Δ, E son mediales y conmensurables sólo en cuadrado.

Digo además que también comprenden un rectángulo medial.

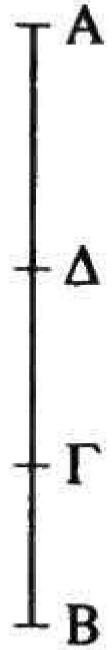
Pues, dado que, como B es a Γ, así Δ a E, entonces, por alternancia, como B es a Δ, así Γ a E. Y como B es a Δ, así Δ a A; entonces, como Δ es a A, así también Γ a E; luego el (rectángulo comprendido) por A, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por Δ, E [VI 16]. Pero el (rectángulo comprendido) por A, Γ es medial [X 21]. Por tanto, el (rectángulo comprendido) por Δ, E es también medial.

Por consiguiente, se han hallado rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un rectángulo medial. Q. E. D.

LEMA 1

Hallar dos números cuadrados tales que su suma sea también un cuadrado.

Pónganse dos números AB, BΓ y sean pares o impares. Y puesto que, tanto si de un número par se quita un número par, como si de un número impar se quita un número impar, el resto es par [IX 24-26]; entonces el resto AΓ es par. Divídase AΓ en dos partes iguales por Δ. Y sean AB, BΓ o números planos semejantes o números cuadrados, que son también ellos mismos números planos semejantes; entonces, el producto de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓΔ es igual al cuadrado de BΔ. Y el producto de AB, BΓ es también un cuadrado, puesto que precisamente hemos demostrado que, si dos números planos semejantes, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) el producto es un número cuadrado [IX 1]; entonces, se han hallado dos números cuadrados, el producto de AB, BΓ y el cuadrado de ΓΔ que, sumados, hacen el cuadrado de BΔ.

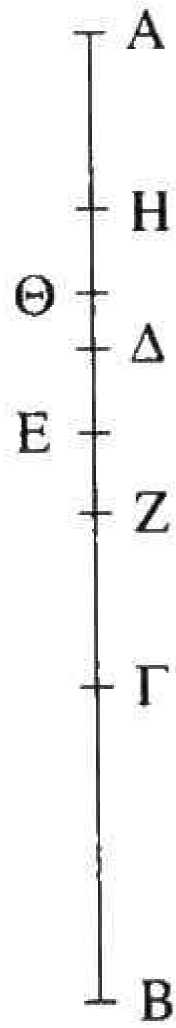


Y queda claro que se han hallado a su vez dos números cuadrados, el (cuadrado) de BΔ y el (cuadrado) de ΓΔ, tales que su diferencia, el producto de AB, BΓ es un número cuadrado, siempre que AB, BΓ sean números planos semejantes. Pero en el caso de que no sean números planos semejantes, se han hallado dos cuadrados, el (cuadrado) de BΔ y el (cuadrado) de ΔΓ, cuya diferencia, el producto de AB, BΓ no es un cuadrado. Q. E. D.

LEMA 2

Hallar dos números cuadrados tales que su suma no sea un cuadrado.

Sea, pues, el producto de AB, BΓ, según dijimos, un cuadrado, y sea ΓA un número par, y divídase en dos partes iguales por Δ. Queda claro que el producto de AB, BΓ junto con el cuadrado de ΓΔ es igual al cuadrado de BΔ [lema 1]. Quítese la unidad ΔE; entonces el producto de AB, BΓ junto con el cuadrado de ΓE es menor que el cuadrado de BΔ.



Pues bien, digo que el cuadrado producto de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no será un número cuadrado.

Pues si es cuadrado, o es igual al (cuadrado) de BE o menor que el (cuadrado) de BE, pero no es mayor, para que no se divida la unidad.

En primer lugar, si es posible, sea el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE igual al cuadrado de BE, y sea HA el doble de la unidad ΔE. Así pues como el total AΓ es el doble del total ΓΔ y en ellos AH es el doble de ΔE, entonces el resto HΓ es el doble del resto EΓ; luego HΓ se ha dividido en dos partes iguales por E; por tanto, el (producto) de HB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BE [II 6]. Pero se ha supuesto que el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BE; entonces el (producto) de HB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE. Ahora bien, si se quita de ambos el (cuadrado) de ΓE, se sigue que AB es igual a HB; lo cual es absurdo. Luego el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no es igual al (cuadrado) de BE.

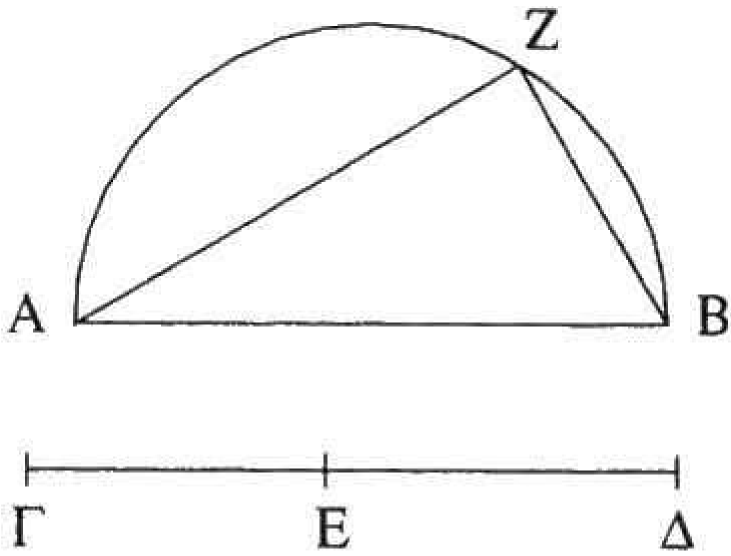
Digo además que tampoco es menor que el (cuadrado) de BE. Pues, si es posible, sea igual al (cuadrado) de BZ, y sea ΘA el doble de ΔZ. Pues bien, se seguirá de nuevo que ΘΓ es el doble de ΓZ; de modo que ΓΘ ha sido dividida también en dos partes iguales por Z y que, por eso, el (producto) de ΘB, BΓ junto con el (cuadrado) de ZΓ es igual al (cuadrado) de BZ [II 6]. Pero se ha supuesto que el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BZ. De modo que también el (producto) de ΘB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓZ será igual al (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE; lo cual es absurdo. Luego el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no es menor que el (cuadrado) de BE. Pero se ha demostrado que tampoco es igual al (cuadrado) de BE. Por consiguiente el (producto) de AB, BΓ junto con el (cuadrado) de ΓE no es un cuadrado. Q. E. D.

Proposición 29

Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella (la mayor).

Póngase, pues, una recta expresable AB y los dos números cuadrados ΓΔ, ΔE, de modo que su diferencia ΓE no sea un cuadrado [lema 1], y descríbase sobre AB el semicírculo AZB, y hágase de forma que como ΔΓ es a ΓE, así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [X 6 Por.], y trácese ZB.

Puesto que, como el (cuadrado) de BA es al (cuadrado) de AZ, así ΔΓ a ΓE, entonces el (cuadrado) de BA guarda con el (cuadrado) de AZ la razón que el número ΔΓ guarda con el número ΓE; luego el (cuadrado) de BA es conmensurable con el (cuadrado) de AZ [X 6]. Pero el (cuadrado) de AB es expresable [X Def. 4]; luego el (cuadrado) de AZ es también expresable [*id.*]; por tanto AZ es también expresable. Y puesto que ΔΓ no guarda con ΔE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de BA tampoco guarda con el cuadrado de AZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego AB es inconmensurable en longitud con AZ [X 9]. Por tanto BA, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, dado que, como ΔΓ es a ΓE, así el (cuadrado) de BA al (cuadrado) de AZ, entonces, por conversión, como ΓΔ es a ΔE, así el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de BZ [V 19 Por.; III 31; I 47]. Pero ΓΔ guarda con ΔE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces, el cuadrado de AB guarda con el cuadrado de BZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego AB es conmensurable en longitud con BZ [X 9]. Y el (cuadrado) de AB es igual a los (cuadrados) de AZ, ZB. Luego el cuadrado de AB es mayor que el de AZ en el (cuadrado) de la (recta) BZ conmensurable con ella (AB).

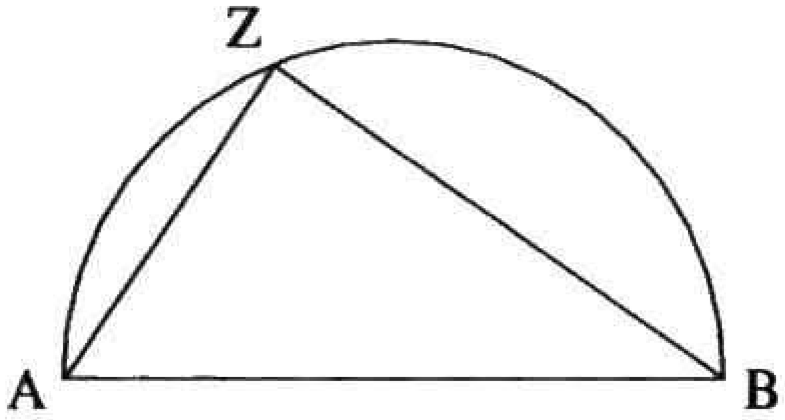


Por consiguiente, se han hallado dos rectas expresables BA, AZ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor AB es mayor que el de la menor AZ en el cuadrado de la (recta) BZ conmensurable en longitud con ella (AB). Q. E. D.

Proposición 30

Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (la mayor).

Póngase, pues, la recta expresable AB y los dos números cuadrados ΓE, EΔ tales que su suma, ΓΔ no sea un número cuadrado [lema 2]. Y descríbase sobre AB el semicírculo AZB, y hágase de forma que como ΔΓ es a ΓE, así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [X 6 Por.], y trácese ZB. De manera semejante a la (proposición) anterior demostraríamos que BA, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, dado que, como ΔΓ es a ΓE, así el (cuadrado) de BA al (cuadrado) de AZ, entonces, por conversión, como ΓΔ es a ΔE, así el (cuadrado) de AB al (cuadrado) de BZ [V 19 por.; III 31, I 47]. Pero ΓA no guarda con ΔE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Entonces el (cuadrado) de AB tampoco guarda con el (cuadrado) de BZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego AB es inconmensurable en longitud con BZ [X 9]. Y el cuadrado de AB es mayor que el de AZ en el (cuadrado) de la (recta) ZB inconmensurable con ella (AB).

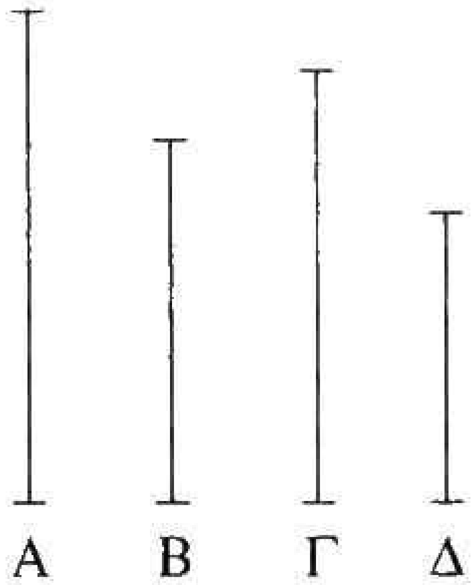


Por consiguiente, AB, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de AZ en el cuadrado de la recta ZB, inconmensurable en longitud con ella (AB). Q. E. D.

Proposición 31

Hallar dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) conmensurable en longitud con ella (la mayor).

Pónganse las dos rectas expresables A, B conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de A que es la mayor sea mayor que el cuadrado de la menor, B, en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (A) [X 29]. Y sea el (cuadrado) de Γ igual al (rectángulo comprendido) por A, B. Pero el (rectángulo comprendido) por A, B es medial [X 21]; entonces el (cuadrado) de Γ también es medial, luego Γ es también medial [X 21]. Sea el rectángulo comprendido por ΓΔ igual al (cuadrado) de B; pero el cuadrado de B es expresable; luego el (rectángulo comprendido) por ΓΔ es también expresable. Ahora bien, dado que como A es a B, así el (rectángulo comprendido) por A, B es al (cuadrado) de B, mientras que el (cuadrado) de Γ es igual al (rectángulo comprendido) por A, B, y el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es igual al (cuadrado) de B, entonces, como A es a B, así el (cuadrado) de Γ al (rectángulo comprendido) por Γ, Δ. Pero, como el (cuadrado) de Γ es al (rectángulo comprendido) por Γ, Δ, así Γ es a Δ; entonces, como A es a B, así Γ a Δ. Pero A es conmensurable con B sólo en cuadrado; luego Γ es también conmensurable con Δ sólo en cuadrado [X 11]. Y es medial; por tanto Δ también es medial [X 23]. Ahora bien, dado que, como A es a B, Γ es a Δ, y el (cuadrado) de A es mayor que el de B en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A), entonces el cuadrado de Γ es también mayor que el de Δ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (Γ) [X 14].



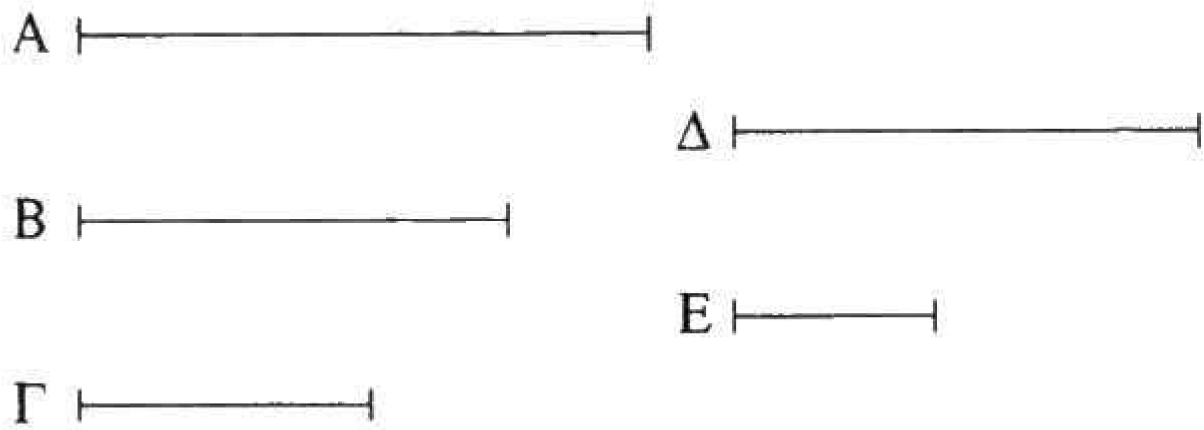
Por consiguiente, se han hallado dos rectas mediales Γ, Δ conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable, y el cuadrado de Γ es mayor que el de Δ en el cuadrado de una (recta) conmensurable en longitud con ella (Γ).

De manera semejante se demostraría que (el cuadrado de Γ es mayor que el cuadrado de Δ) en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (Γ), siempre que el cuadrado de A sea mayor que el de B en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (A) [X 30][26].

Proposición 32

Hallar dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (la mayor).

Pónganse tres rectas expresables A, B, Γ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de A sea mayor que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A) [X 29]; y sea el (cuadrado) de Δ igual al (rectángulo comprendido) por A, B. Entonces el (cuadrado) de Δ es medial; luego Δ es medial [X 21]. Pero sea el (rectángulo comprendido) por Δ, E igual al (rectángulo comprendido) por B, Γ. Y dado que, como el (rectángulo comprendido) por A, B es al (rectángulo comprendido) por B, Γ, así A es a Γ; mientras que el (cuadrado) de Δ es igual al (rectángulo comprendido) por A, B y el (rectángulo comprendido) por Δ, E es igual al (rectángulo comprendido) por B, Γ; entonces, como A es a Γ, así el cuadrado de Δ es al (rectángulo comprendido) por Δ, E. Pero como el (cuadrado) de Δ es al (rectángulo comprendido) por Δ, E, así Δ a E; luego como A es a Γ, así Δ a E. Pero A es conmensurable con Δ sólo en cuadrado. Entonces Δ es conmensurable con E sólo en cuadrado [X 11]. Pero Δ es medial. Luego E es también medial [X 23]. Ahora bien, dado que, como A es a Γ, Δ es a E, mientras que el cuadrado de A es mayor que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A), entonces el cuadrado de Δ será también mayor que el de E en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (Δ) [X 14].



Digo además que el (rectángulo comprendido) por Δ, E es también medial. Pues como el (rectángulo comprendido) por B, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por Δ, E y el (rectángulo comprendido) por B, Γ es medial [X 21], entonces el (rectángulo comprendido) por Δ, E es también medial.

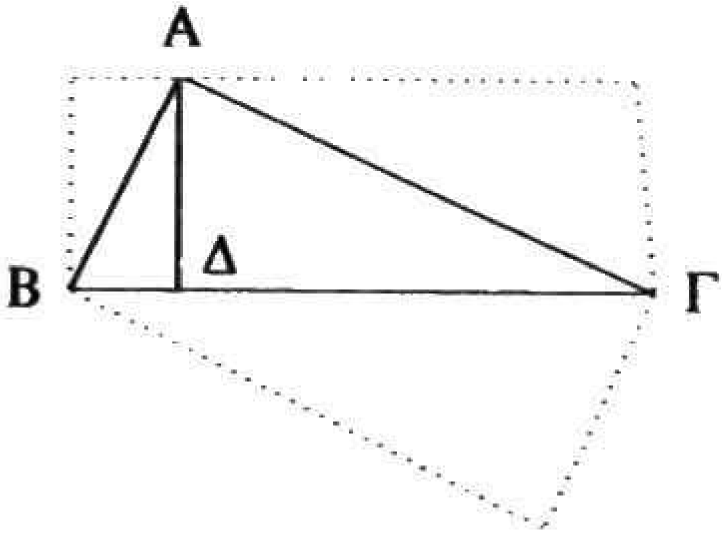
Por consiguiente, se han hallado dos (rectas) mediales Δ, E conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial, de modo que el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor).

De manera semejante se demostraría también que (el cuadrado de Δ es mayor que el de E) a su vez en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (Δ), siempre que el cuadrado de A sea mayor que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (A)[27].

LEMA

Sea ABΓ un triángulo rectángulo que tenga recto el ángulo correspondiente a A y trácese la perpendicular AΔ.

Digo que el (rectángulo comprendido) por ΓB, BΔ es igual al cuadrado de BA, mientras que el (rectángulo comprendido) por BΓ, ΓΔ es igual al cuadrado de ΓA, y el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ es igual al cuadrado de AΔ y además el (rectángulo comprendido) por BΓ, AΔ es igual al (rectángulo comprendido) por BA, AΓ.



En primer lugar (digo) que el (rectángulo comprendido) por ΓΒ, ΒΔ es igual al cuadrado de ΒΑ.

Pues como, en un triángulo rectángulo, se ha trazado la perpendicular ΑΔ desde el ángulo recto hasta la base, entonces los triángulos ΑΒΔ, ΑΔΓ son semejantes al triángulo entero ΑΒΓ y entre sí [VI 8]. Y puesto que el triángulo ΑΒΓ es semejante al triángulo ΑΒΔ, entonces, como ΓΒ es a ΒΑ, así ΒΑ a ΒΔ [VI 4]; luego el (rectángulo comprendido) por ΓΒ, ΒΔ es igual al (cuadrado) de ΑΒ [VI 17].

Por lo mismo entonces, el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, ΓΔ es igual también al cuadrado de ΑΓ.

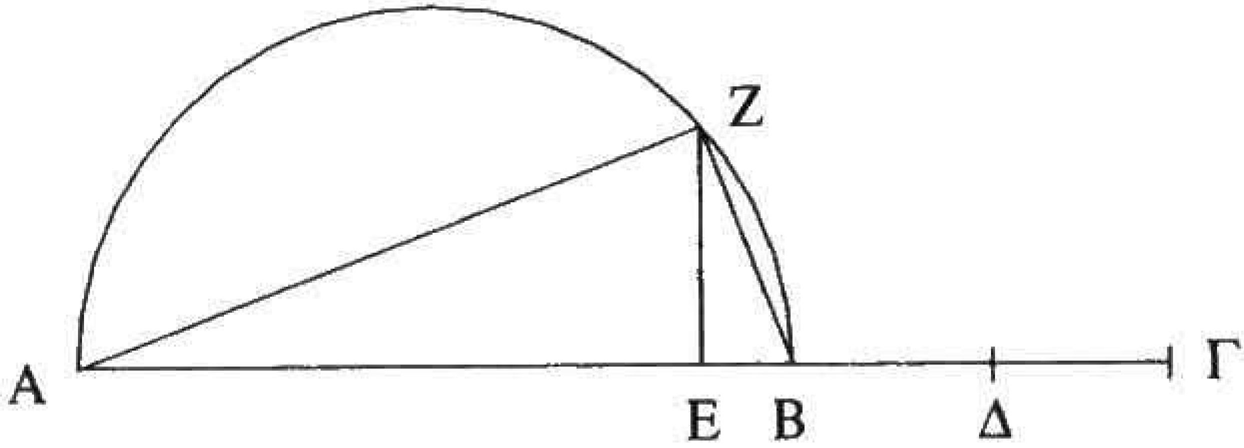
Ahora bien, dado que, si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, la recta trazada es la media proporcional de los segmentos de la base [VI 8 Por.], entonces, como ΒΔ es a ΔΑ, así ΑΔ a ΔΓ; luego el (rectángulo comprendido) por ΒΔ, ΔΓ es igual al cuadrado de ΔΑ [VI 17].

Digo que el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, ΑΔ es igual también al (rectángulo comprendido) por ΒΑ, ΑΓ. Pues como, según hemos dicho, el triángulo ΑΒΓ es semejante al (triángulo) ΑΒΔ, entonces, como ΒΓ es a ΓΑ, así ΒΑ a ΑΔ [VI 4]. Por consiguiente, el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, ΑΔ es igual al (rectángulo comprendido) por ΒΑ, ΑΓ [VI 16] Q. E. D.

Proposición 33

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas, medial.

Pónganse dos rectas expresables ΑΒ, ΒΓ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor, ΑΒ, sea mayor que el cuadrado de la menor, ΒΓ, en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (ΑΒ) [X 30], y divídase ΒΓ en dos partes iguales por el (punto) Δ, y aplíquese a ΑΒ un paralelogramo igual al cuadrado de cada una de las (rectas) BΔ, ΔΓ y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AE, EB [VI 28]. Descríbase sobre AB el semicírculo AZB y trácese EZ formando ángulos rectos con AB y trácense AZ, ZB.



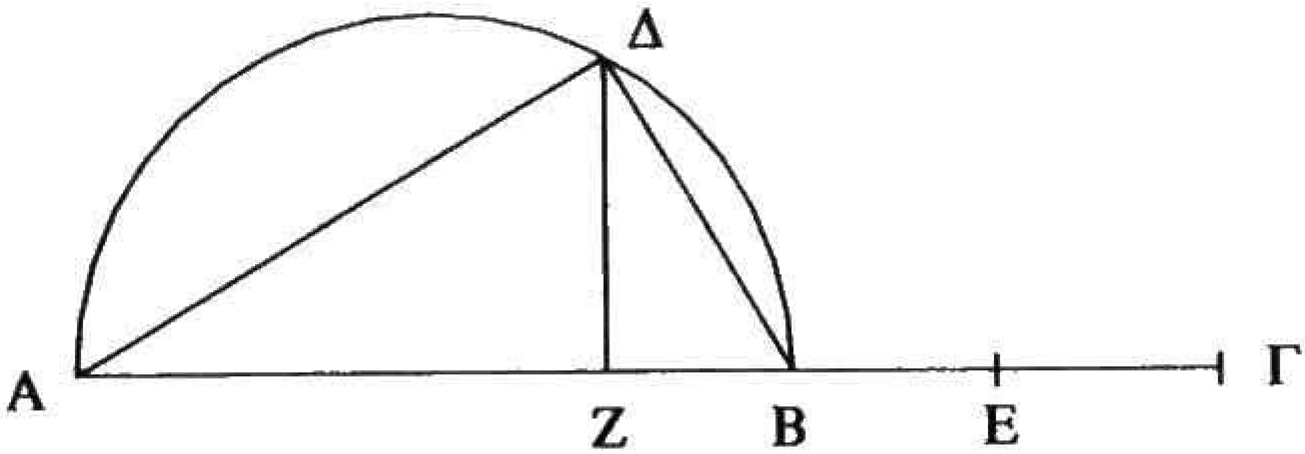
Y como AB, BΓ son dos rectas desiguales y el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de BΓ en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (AB), mientras que se ha aplicado a AB un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de BΓ, es decir, al cuadrado de su mitad, y deficiente en la figura de un cuadrado, produciendo el (rectángulo comprendido) por AE, EB, entonces AE es inconmensurable con EB [X 18]. Ahora bien, como AE es a EB, así el (rectángulo comprendido) por BA, AE al (rectángulo comprendido) por AB, BE, mientras que el (rectángulo comprendido) por BA, AE es igual al cuadrado de AZ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BE al cuadrado de BZ; entonces el cuadrado de AZ es inconmensurable con el cuadrado de ZB; luego AZ, ZB son inconmensurables en cuadrado. Y como AB es expresable, entonces el cuadrado de AB es también expresable. De modo que la suma de los cuadrados de AZ, ZB es también expresable [I 47]. Y puesto que a su vez el (rectángulo comprendido) por AE, EB es igual al cuadrado de EZ y se ha supuesto que el (rectángulo comprendido) por AE, EB es igual también al cuadrado de BΔ, entonces ZE es igual a BΔ; luego BΓ es el doble de ZE; de modo que el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, EZ. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial [X 21]; luego el (rectángulo comprendido) por AB, EZ es también medial [X 23 Por.]. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, EZ es igual al (rectángulo comprendido) por AZ, ZB [lema]: por tanto, el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB es también medial. Y se ha demostrado que la suma de sus cuadrados es también expresable.

Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AZ, ZB inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas, medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 34

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial, pero el rectángulo comprendido por ellas expresable.

Pónganse dos rectas mediales, AB, BΓ, conmensurables sólo en cuadrado, que comprendan un rectángulo expresable, de modo que el cuadrado de AB sea mayor que el de BΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 31 *ad finem*] y descríbase sobre AB el semicírculo AΔB, y divídase AΓ en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a la recta AB un paralelogramo igual al (cuadrado) de BE deficiente en la figura de un cuadrado, es decir, el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB [VI 28]. Entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZB [X 18]. Trácese ZΔ, desde Z, formando ángulos rectos con AB, y trácense AΔ, ΔB.



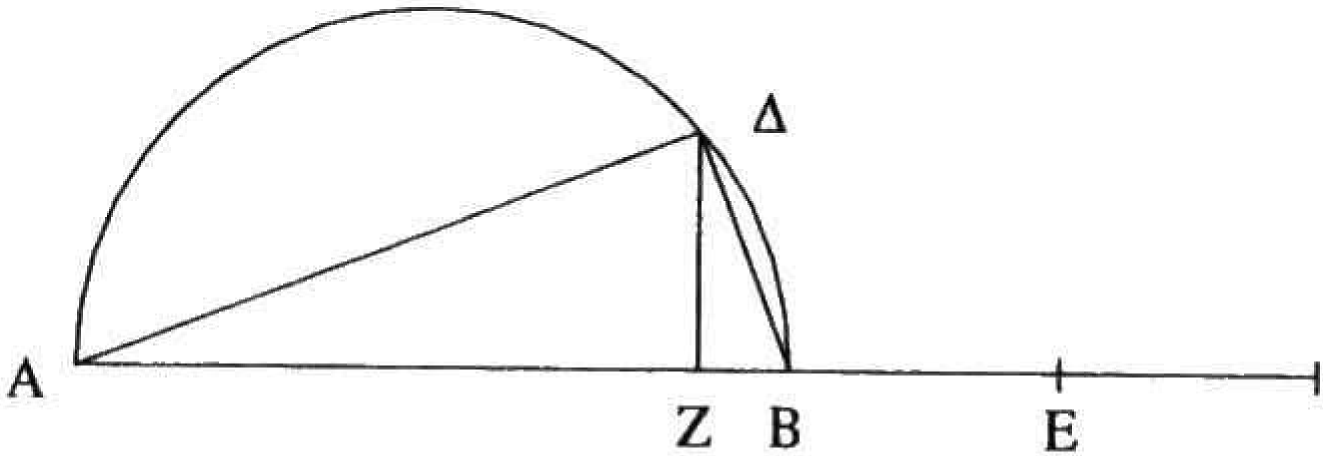
Como AZ es inconmensurable con ZB, entonces el (rectángulo comprendido) por BA, AZ es inconmensurable también con el (rectángulo comprendido) por AB, BZ [X 11]. Pero el (rectángulo comprendido) por BA, AZ es igual al (cuadrado) de AΔ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BZ (es igual) al (cuadrado) de ΔB; entonces el (cuadrado) de AΔ es también inconmensurable con el (cuadrado) de ΔB. Y como el (cuadrado) de AB es medial, entonces la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB es también medial [III 31; I 47]. Y como BΓ es el doble de ΔZ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también el doble del (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; luego el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es también expresable [X 6]. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [lema]; de modo que el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es también expresable.

Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AΔ, ΔB inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial, pero el rectángulo comprendido por ellas expresable.

Proposición 35

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados.

Pónganse dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado AB, BΓ que comprendan un (rectángulo) medial, de modo que el cuadrado de AB sea mayor que el cuadrado de BΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 32]. Y descríbase sobre AB el semicírculo AΔB, y sea semejante a la anterior el resto (de la construcción).



Ahora bien, como AZ es inconmensurable en longitud con ZB [X 18], AΔ es también inconmensurable en cuadrado con ΔB [X 11]. Y como el (cuadrado) de AB es medial, entonces la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB es también medial [III 31; I 47]. Ahora bien, como el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB es igual al (cuadrado) de cada una de las (rectas) BE, ΔZ, entonces BE es igual a ΔZ; luego BΓ es el doble de ZΔ; de modo que el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es el doble del (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ; por tanto, el (rectángulo comprendido por AB, BΓ es medial; entonces el.(rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es también medial [X 32 Por.]. Y también es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [Lema siguiente a X 32]; luego el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es también medial. Ahora bien, como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, mientras que ΓB es conmensurable con BE, entonces AB es inconmensurable en longitud con BE [X 13]; de modo que el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BE [X 11]. Pero los (cuadrados) de AΔ, ΔB son iguales al (cuadrado) de AB [I 47], mientras que el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ, es decir, el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es igual al (rectángulo comprendido) por AB, BE; por tanto, la suma de los (cuadrados) AΔ, ΔB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB.

Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AΔ, ΔB inconmensurables en cuadrado, que hacen la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados. Q. E. D.

Proposición 36

Si se suman dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, la (recta) entera no es expresable; llámesela binomial.

Súmense, pues, las dos (rectas) expresables AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado.

Digo que el total AΓ no es expresable.

Pues, dado que AB es inconmensurable en longitud con BΓ, porque son conmensurables sólo en cuadrado, mientras que, como AB es a BΓ, así el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ al (cuadrado) de BΓ, entonces, el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con el (cuadrado) de BΓ [X 11]. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6], mientras que los (cuadrados) de AB, BΓ son conmensurables con el (cuadrado) de BΓ, porque AB, BΓ son expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 15], luego el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con los (cuadrados) de AB, BΓ. Y, por composición, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ junto con los (cuadrados) de AB, BΓ, es decir, el (cuadrado) de AΓ [II 4], es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ [X 16]: pero la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es expresable; entonces el cuadrado de AΓ no es expresable; de modo que AΓ tampoco es expresable; llámesela binomial. Q. E. D.[28].

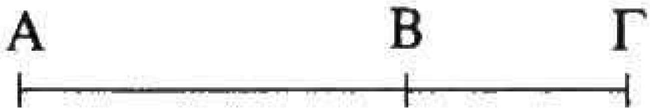
Proposición 37

Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable, la (recta) entera no es expresable; llámesela primera bimedial.

Súmense, pues, las dos rectas mediales AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Digo que el total AΓ no es expresable.

Pues como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 36; II 9-20]. Ahora bien, por composición, los (cuadrados) de AB, BΓ junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, que es precisamente el (cuadrado) de AΓ [II 4], es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; porque se ha supuesto que AB, BΓ comprenden un (rectángulo) expresable. Por tanto, el cuadrado de AΓ no es expresable [X Def. 4]; llámesela primera bimedial[29].



Proposición 38

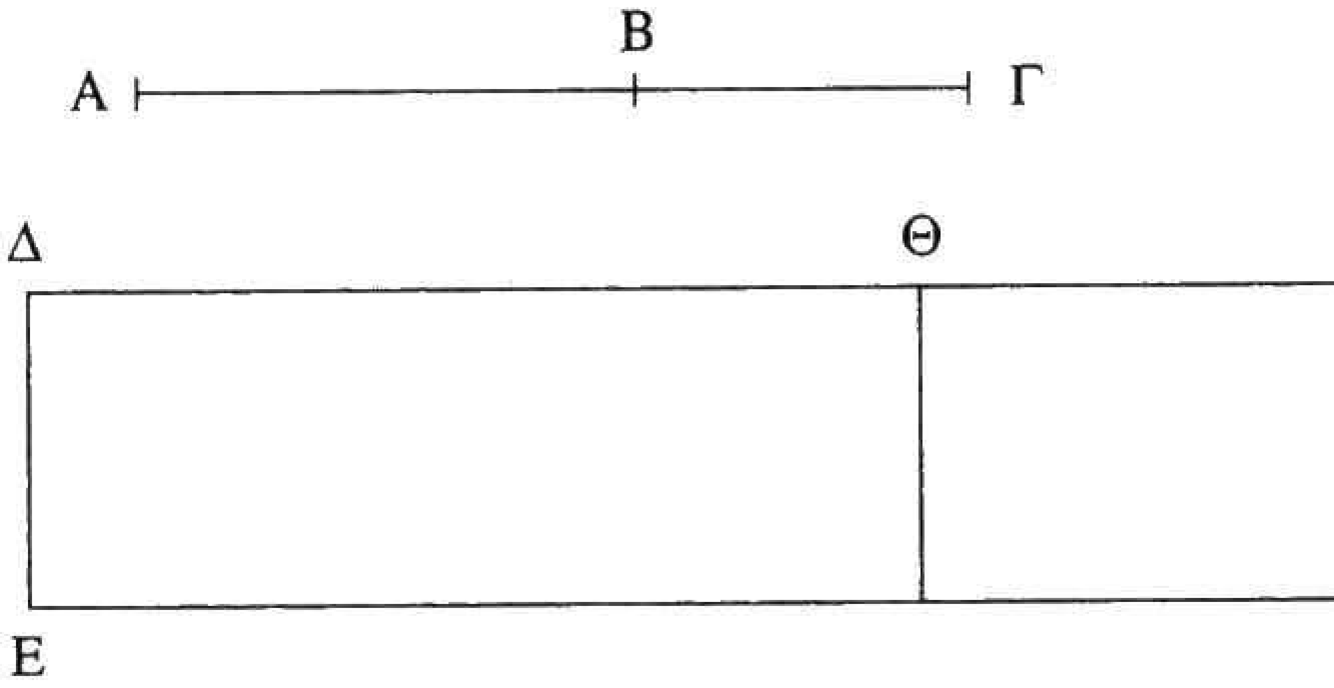
Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial, la (recta) entera no es expresable; llámesela segunda bimedial.

Súmense, pues, las dos (rectas) mediales AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial.

Digo que AΓ no es expresable.

Póngase, pues, la (recta) expresable ΔE y aplíquese a ΔE el rectángulo ΔZ igual al (cuadrado) de AΓ, de modo que produzca la anchura ΔH [I 44]. Y como el (cuadrado) de AΓ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [II 4], aplíquese ahora a ΔE el (rectángulo) EΘ igual a los (cuadrados) de AB, BΓ; entonces el (rectángulo) restante ΘZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Y como cada una de las (rectas) AB, BΓ es medial, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son también mediales. Pero se ha supuesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también medial. Y EΘ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ, mientras que ZΘ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces cada uno de los (rectángulos) EΘ, ΘZ es medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ΔE; luego cada una de las (rectas) ΔΘ, ΘH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Así pues, dado que AB es inconmensurable en longitud con BΓ, y que, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de AB al (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 11]. Pero la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es conmensurable con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6]. Por tanto, la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 13]. Pero EΘ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ, y ΘZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Luego EΘ es inconmensurable con ΘZ; de modo que ΔΘ es también inconmensurable en longitud con ΘH [VI 1].

Entonces ΔΘ, ΘΗ son expresables conmensurables sólo en cuadrado. De modo que ΔΗ no es expresable [X 36]. Pero ΔΕ es expresable; y el rectángulo comprendido por una (recta) no expresable y una expresable no es expresable [X 20]; entonces el área ΔΖ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a ella no es expresable [X Def. 4]. Pero ΑΓ es el lado del cuadrado igual a ΔΖ; por consiguiente ΑΓ no es expresable; llámesela segunda bimedial. Q. E. D.



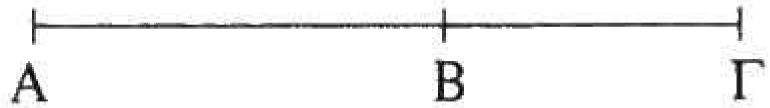
Proposición 39

Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial; la (recta) entera no es expresable; llámesela «mayor».

Súmense pues las dos rectas ΑΒ, ΒΓ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 33].

Digo que ΑΓ no es expresable.

Pues como el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es medial, el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es medial [X 6 y 23 Por.]. Pero la suma de los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ es expresable; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ; de modo que los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ junto con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ, que es precisamente el cuadrado de ΑΓ también es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ [X 16]. Por consiguiente, el (cuadrado) de ΑΓ no es expresable; de modo que ΑΓ tampoco es expresable [X Def. 4]; llámesela «mayor». Q. E. D.[30].



PROPOSICIÓN 40

Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable, la (recta) entera no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

Súmense, pues, las dos rectas AB, BΓ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 34].

Digo que AΓ no es expresable.

Pues como la suma de los cuadrados de AB, BΓ es medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable, entonces la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 16]. De modo que también el (cuadrado) de AΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; luego el cuadrado de AΓ no es expresable. Por tanto, AΓ no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial. Q. E. D.[31].

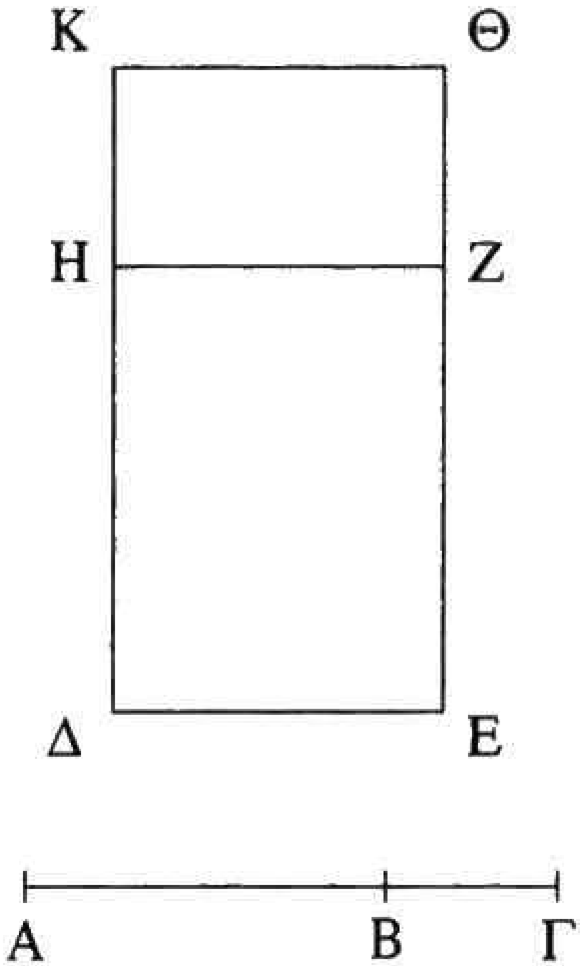
PROPOSICIÓN 41

Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial e inconmensurable además con la suma de sus cuadrados, entonces la (recta) entera no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Súmense, pues, las dos rectas ΑΒ, ΒΓ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 35].

Digo que ΑΓ no es expresable.

Póngase la recta expresable ΔΕ y aplíquese a ΔΕ el (rectángulo) ΔΖ igual a los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ y el (rectángulo) ΗΘ igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ; entonces el (rectángulo) entero ΔΘ es igual al (cuadrado) de ΑΓ [II 4] y como la suma de los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ es medial y es igual a ΔΖ, entonces ΔΖ es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔΕ; luego ΔΗ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔΕ [X 22]. Por lo mismo, ΗΚ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΗΖ, es decir, con ΔΕ. Y como los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ, ΔΖ es inconmensurable con ΗΘ; de manera que ΔΗ también es inconmensurable con ΗΚ [VI 1, X 11]. Y son expresables; entonces ΔΗ, ΗΚ son conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔΚ, la llamada binomial, no es expresable [X 36]. Pero ΔΕ es expresable; entonces el (rectángulo) ΔΘ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a él no es expresable [X Def. 4]. Pero ΑΓ es el lado del cuadrado igual a ΘΔ. Por tanto, ΑΓ no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales. Q. E. D.[32].



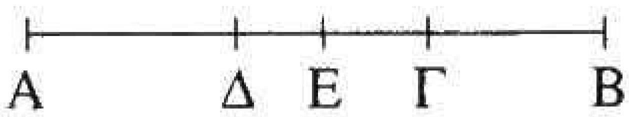
LEMA

Y que las antedichas rectas no expresables se dividen de una sola manera en las rectas de las que se componen dando lugar a los tipos propuestos lo demostraremos enseguida, después de adelantar el siguiente lema.

Póngase una recta AB y córtese la (recta) entera en partes desiguales por cada uno de los puntos Γ, Δ; y supóngase que AΓ es mayor que ΔB.

Digo que los cuadrados de AΓ, ΓB son mayores que los cuadrados de AΔ, ΔB.

Divídase, pues, AB en dos partes iguales por el (punto) E. Y como AΓ es mayor que ΔB, quítese de ambos ΔΓ; entonces la (recta) restante AΔ es mayor que la (recta) restante ΓB. Pero AE es igual a EB; entonces ΔE es menor que EΓ; luego los (puntos) Γ, Δ no están a igual distancia del punto de bisección. Y como el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB junto con el (cuadrado) de EΓ es igual al (cuadrado) de EB [II 5], mientras que el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB junto con el (cuadrado) de ΔE es igual al (cuadrado) de EB [id.], entonces el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB junto con el (cuadrado) de EΓ es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB junto con el (cuadrado) de ΔE; de los cuales el (cuadrado) de ΔE es menor que el (cuadrado) de EΓ; luego el (rectángulo) restante (comprendido) por AΓ, ΓB es menor que el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB. De modo que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es también menor que el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB.



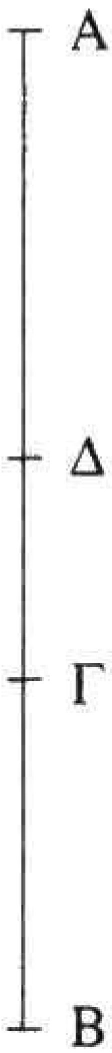
Por consiguiente, el resto, la suma de los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ es mayor que la suma de los (cuadrados) de ΑΔ, ΔΒ. Q. E. D. [33].

Proposición 42

La recta binomial se divide en sus términos por un sólo punto.

Sea dividida en sus términos la (recta) binomial ΑΒ por el (punto) Γ; entonces ΑΓ, ΓΒ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36].

Digo que ΑΒ no se divide por otro punto en dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado.



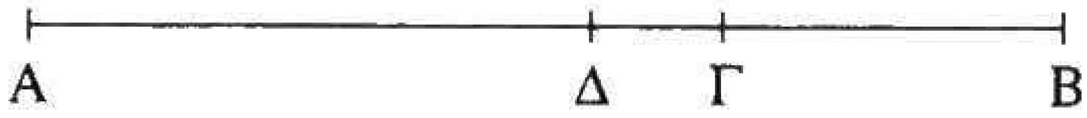
Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ, de modo que AΔ, ΔB sean (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Entonces queda claro que AΓ no es la misma que ΔB. Pues, si es posible, séalo. Entonces AΔ será también la misma que ΓB; y como AΓ es a ΓB, así será BΔ a ΔA, AB resultará dividida también por el punto Δ de la misma manera que por el punto Γ; lo cual precisamente se ha supuesto que no. Luego AΓ no es la misma que ΔB. Por eso los puntos Γ, Δ tampoco están a igual distancia del punto de bisección. Luego en aquello en lo que los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren de los (cuadrados) de AΔ, ΔB, en eso difieren también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, porque, tanto los (cuadrados) de AΓ, ΓB junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, como los (cuadrados) de AΔ, ΔB junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB son iguales al (cuadrado) de AB [II 4]. Pero los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren de los (cuadrados) de AΔ, ΔB en un área expresable; pues ambos son expresables; luego el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB también difiere del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un área expresable, aún siendo medial [X 21]; lo cual es absurdo; porque un (área) medial no excede a otra (área) medial en un (área) expresable [X 26].

Por consiguiente, la recta binomial no se divide por diferentes puntos; luego se divide por uno sólo. Q. E. D.

Proposición 43

La recta primera bimedial se divide por un sólo punto.

Sea dividida la recta primera bimedial AB por el (punto) Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable [X 37].



Digo que AB no se divide por otro punto.

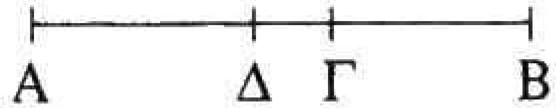
Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ, de modo que las rectas AΔ, ΔB sean (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que contengan un (rectángulo) expresable. Pues como en aquello en que difiere el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB, del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, en eso difieren los (cuadrados) de AΓ, ΓB de los (cuadrados) de AΔ, ΔB, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB difiere del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable, porque ambas son expresables, entonces los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren también de los (cuadrados) de AΔ, ΔB en un (área) expresable, aun siendo mediales; lo cual es absurdo [X 26].

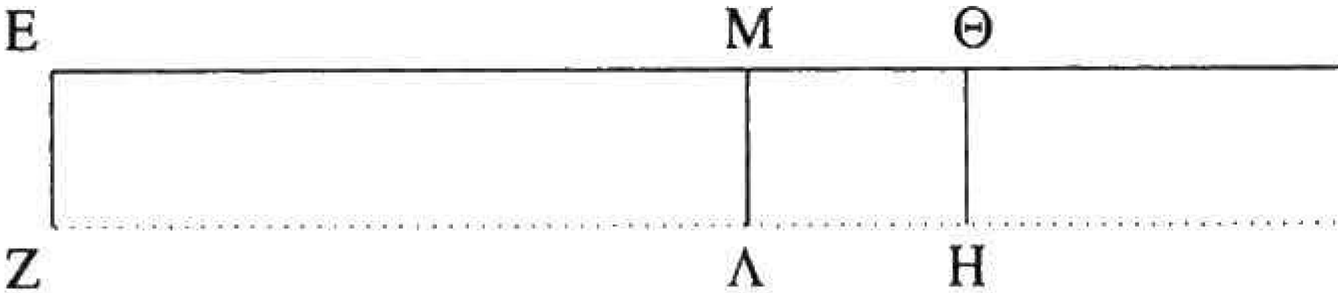
Por consiguiente, la (recta) primera bimedial no se divide en sus términos por diferentes puntos; luego se divide por uno sólo. Q. E. D.

Proposición 44

La recta segunda bimedial se divide por un sólo punto.

Sea dividida la (recta) segunda bimedial AB por el punto Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial [X 38]; entonces queda claro que Γ no es el punto de bisección, porque los segmentos no son conmensurables en longitud.





Digo que AB no se divide por otro punto.

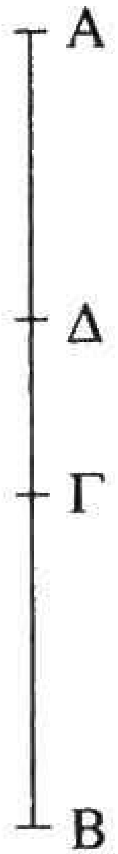
Pues, si es posible, divídase por el (punto) Δ, de modo que AΓ no sea la misma que ΔB, sino que AΓ sea por hipótesis mayor; entonces es evidente que los (cuadrados) de AΔ, ΔB, según hemos demostrado más arriba [Lema] también son menores que los (cuadrados) de AΓ, ΓB; supóngase que AΔ, ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial. Y póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ un paralelogramo rectángulo, EK, igual al (cuadrado) de AB; quítese, por otra parte, EH igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB; entonces el resto ΘK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [II 4]. Quítese, a su vez, EΛ igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB que precisamente se ha demostrado que son menores que los de AΓ, ΓB [Lema]; entonces el (rectángulo) restante MK es también igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB. Y como los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mediales, entonces EH es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ, luego EΘ es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Por lo mismo, entonces, ΘN es también expresable e inconmensurable en longitud con EZ. Y puesto que AΓ, ΓB son mediales y conmensurables sólo en cuadrado, entonces AΓ es inconmensurable en longitud con ΓB. Pero, como AΓ es a ΓB, así el (cuadrado) de AΓ es al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB; entonces el (cuadrado) de AΓ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [X 11]: pero los (cuadrados) de AΓ, ΓB son conmensurables con el (cuadrado) de AΓ; porque AΓ, ΓB son conmensurables en cuadrado [X 15]. Ahora bien, el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [X 6]. Entonces los (cuadrados) de AΓ, ΓB son también inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [X 13]. Pero EH es igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, mientras que ΘK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB; luego EH es inconmensurable con ΘK; de modo que EΘ es también inconmensurable en longitud con ΘN [VI 1; X 11]. Y son expresables; entonces EΘ, ΘN son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Pero si se suman dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, la recta entera, la llamada binomial, no es expresable; entonces EN es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ. Siguiendo el mismo procedimiento se demostraría que EM, MN son expresables y conmensurables sólo en cuadrado; y EN será una (recta) binomial dividida por los puntos diferentes Θ, M; ahora bien, EΘ no es la misma que MN, porque los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que los (cuadrados) de AΔ, ΔB. Pero los cuadrados de AΔ, ΔB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB; luego los (cuadrados) de AΓ, ΓB, es decir EH, son mucho mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB, es decir, MK; de modo que EΘ es también mayor que MN.

Por consiguiente, EΘ no es la misma que MN. Q. E. D.

Proposición 45

La recta «mayor» se divide por uno y el mismo punto.

Sea dividida la recta «mayor» AB por el (punto) Γ de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de AΓ, ΓB expresable, pero el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB medial [X 39].



Digo que AB no se divide por otro punto.

Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ de modo que AΔ, ΔB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma se los cuadrados de AΔ, ΔB expresable, pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial. Y como en aquello en que los (cuadrados) de AΓ, ΓB difieren de los (cuadrados) de AΔ, ΔB, en eso difiere también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, mientras que los (cuadrados) de AΓ, ΓB exceden a los (cuadrados) de AΔ, ΔB en un (área) expresable, porque ambos son expresables; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB también excede del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable, aun siendo mediales; lo cual es imposible [X 26]. Luego la (recta) «mayor» no se divide por diferentes puntos. Por consiguiente, se divide sólo por uno y el mismo punto. Q. E. D.

Proposición 46

El lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial se divide sólo por un punto.

Sea dividido el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más un área medial AB por el punto Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ medial, y el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΔΒ expresable [X 40].

Digo que ΑΒ no se divide por otro punto.

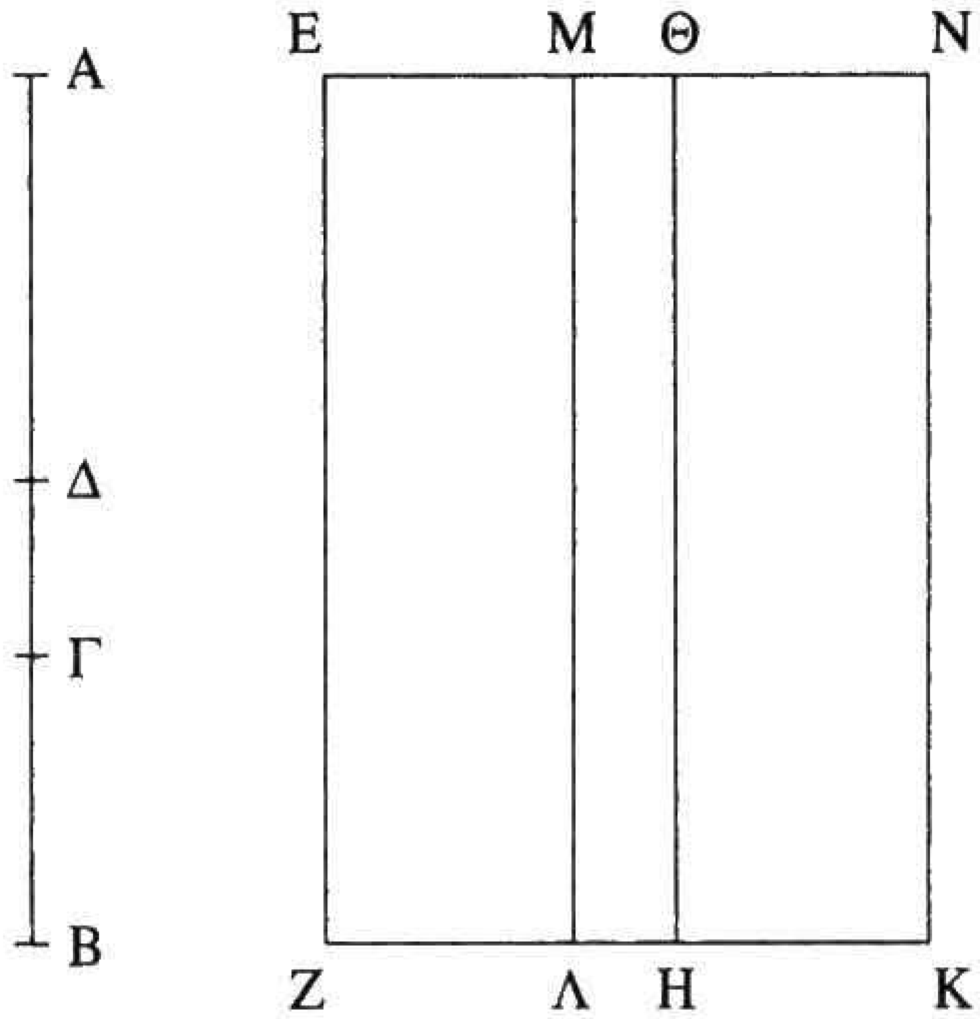
Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ, de modo que ΑΔ, ΔΒ sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los (cuadrados) de ΑΔ, ΔΒ medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΒ expresable. Pues como en aquello en que difiere el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ del doble del (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΒ, en eso difieren también los (cuadrados) de ΑΔ, ΔΒ de los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ y el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ excede del doble del (rectángulo comprendido) por ΑΔ, ΔΒ en un (área) expresable, entonces los (cuadrados) de ΑΔ, ΔΒ también exceden a los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ en un (área) expresable, aún siendo mediales; lo cual es imposible [X 26]. Luego el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más un (área) medial no se divide por diferentes puntos.

Por consiguiente, se divide por un solo punto. Q. E. D.

Proposición 47

El lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales se divide por un sólo punto.

Sea dividida AB por el punto Γ, de modo que AΓ, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de AΓ, ΓB medial y el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB medial también e inconmensurable con la suma de sus cuadrados.



Digo que AB no se divide por otro punto cumpliendo las condiciones propuestas.

Pues, si es posible, divídase por el (punto) Δ de modo que sea evidente que AΓ no es la misma que ΔB, sino mayor que AΓ por hipótesis.

Y póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ el (rectángulo) EH igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, y el rectángulo ΘK igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB; entonces el (rectángulo) entero EK es igual al cuadrado de AB [II 4]. Aplíquese, a su vez, a EZ el (rectángulo) EΛ igual a los (cuadrados) de AΔ, ΔB; entonces, el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es igual al resto MK. Y como se ha supuesto que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es medial, entonces EH también es medial. Y se ha aplicado a la (recta expresable) EZ. Luego ΘE es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Por lo mismo, entonces, ΘN es una recta expresable inconmensurable en longitud con EZ. Y como la suma de los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ, entonces EH es inconmensurable con HN; de modo que EΘ es inconmensurable con ΘN [VI 1; X 11]. Y son expresables; entonces EΘ, ΘN son expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego EN es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ [X 36]. De manera semejante demostraríamos que también se divide por el (punto) M. Ahora bien, EΘ no es la misma que MN; entonces una (recta) binomial se ha dividido por dos puntos diferentes; lo cual es absurdo [X 42]. Luego el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales no se divide por dos puntos diferentes.

Por consiguiente, se divide por uno sólo.

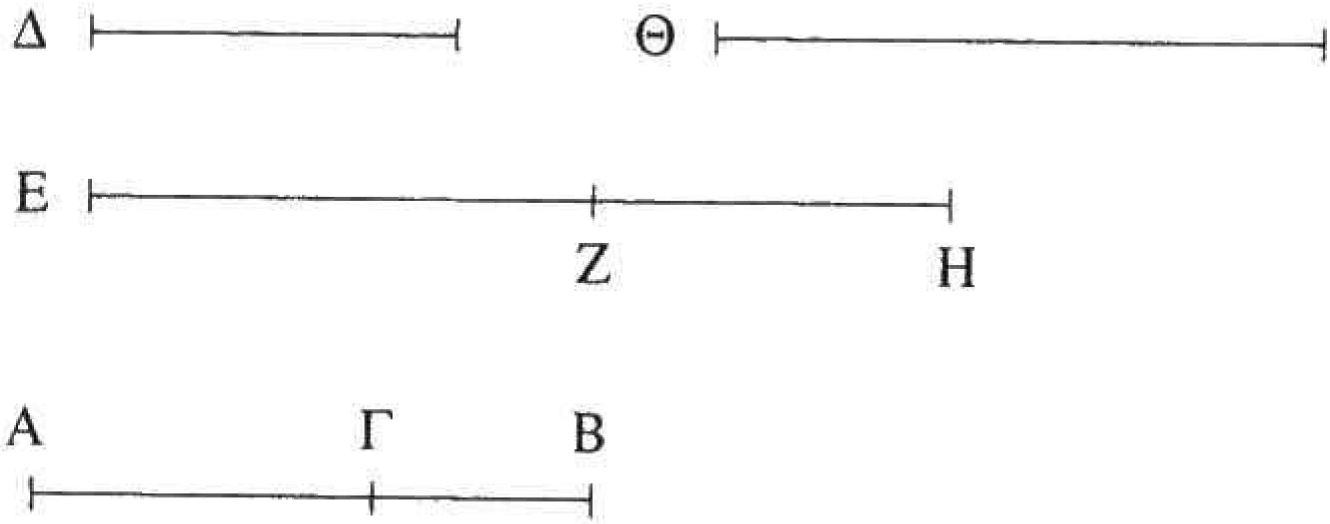
SEGUNDAS DEFINICIONES[34]

1. Dada una recta expresable y otra binomial dividida en sus términos, de forma que el cuadrado del término mayor sea mayor que el cuadrado del (término) menor en el (cuadrado) de una recta conmensurable en longitud con él (el mayor); si el término mayor es conmensurable en longitud con la recta expresable dada, llámese (la recta entera) *primera binomial.*
2. Y si el término menor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable, llámese (la recta entera) *segunda binomial.*
3. Pero si ninguno de los términos es conmensurable en longitud con la recta expresable dada, llámese (la recta entera) *tercera binomial.*
4. Si el cuadrado del término mayor es, a su vez, mayor (que el del menor) en el cuadrado de una (recta) inconmensurable en longitud con el mayor, entonces, si el término mayor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la recta entera) *cuarta binomial.*
5. Pero si (lo es) el menor, *quinta.*
6. Y si ninguno de los dos, *sexta.*

Proposición 48

Hallar una recta primera binomial

Pónganse dos números ΑΓ, ΓΒ de modo que su suma AB guarde con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no guarde con ΓΑ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [Lema 1 después de X 28]. Y póngase una recta expresable Δ, y sea la recta EZ conmensurable en longitud con Δ. Entonces EZ es también expresable. Y como el número BA es al número ΑΓ, sea así el cuadrado de EZ al cuadrado de ZH [X 6 Por.]. Pero AB guarda con ΑΓ la razón que un número guarda con un número; entonces el cuadrado de EZ guarda también con el cuadrado de ZH la razón que un número guarda con un número; de modo que el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Y EZ es expresable, luego ZH es también expresable. Ahora bien, dado que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de EZ tampoco guarda con el cuadrado de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Entonces EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego EH es binomial [X 36].



Digo que también es primera.

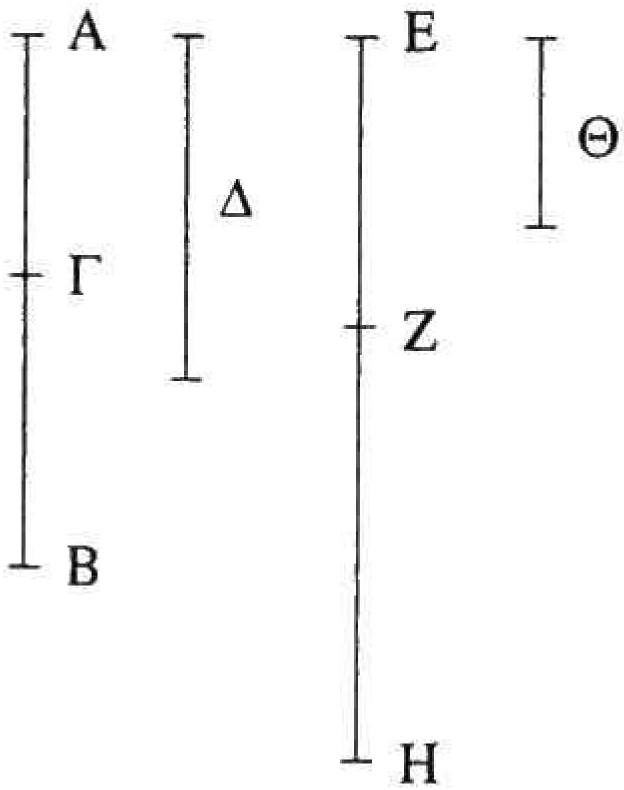
Pues, dado que como el número BA es al (número) AΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, y que BA es mayor que AΓ, entonces, el (cuadrado) de EZ es también mayor que el (cuadrado) de ZH. Sean, pues, los (cuadrados) de ZH, Θ iguales al (cuadrado) de EZ. Y dado que, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces, por conversión, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es conmensurable en longitud con Θ [X 9]; por tanto, el cuadrado de EZ es mayor que el (cuadrado) de ZH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (EZ). Y EZ, ZH son (rectas) expresables, y EZ es conmensurable en longitud con Δ.

Por consiguiente EH es una primera binomial. Q. E. D.

Proposición 49

Hallar una (recta) segunda binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que su suma AB guarde con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no guarde con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y póngase la recta expresable Δ, y sea la recta EZ conmensurable en longitud con Δ; entonces EZ es expresable. Y hágase de forma que, como el número ΓA es al número AB, sea así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el cuadrado de ZH [X 6]. Luego ZH es expresable. Ahora bien, dado que el número ΓA no guarda con el (número) AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el cuadrado de EZ guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]; luego EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, EH es binomial.



Hay que demostrar ahora que también es segunda.

Pues, dado que, por inversión, como el número BA es al (número) AΓ, así el (cuadrado) de HZ al (cuadrado) de ZE, mientras que BA es mayor que AΓ; entonces el cuadrado de HZ es mayor que el (cuadrado) de ZE.

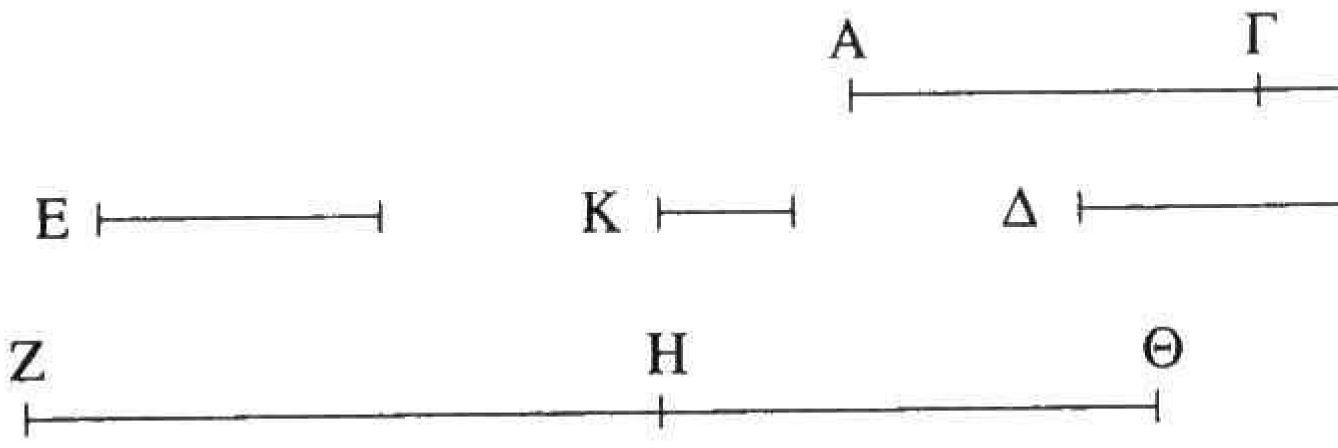
Sean los (cuadrados) de EZ, Θ iguales al (cuadrado) de HZ; entonces, por conversión, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH guarda también con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]; de modo que el cuadrado de ZH es mayor que el cuadrado de ZE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Ahora bien, ZH, ZE son (rectas) racionales conmensurables sólo en cuadrado, y el término menor EZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada Δ.

Por consiguiente, EH es una segunda binomial. Q. E. D.

Proposición 50

Hallar una (recta) tercera binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que su suma AB guarde con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no guarde con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Póngase otro número cualquiera Δ, que no sea cuadrado y que no guarde con ninguno de los números BA, AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una recta expresable E y hágase de forma que, como Δ es a AB, sea así el (cuadrado) de E al cuadrado de la (recta) ZH [X 6 Por.]. Entonces, el cuadrado de E es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Ahora bien, E es una (recta) expresable; luego ZH es también expresable. Y dado que Δ no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el cuadrado de E guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces E es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Hágase de forma que, como el número BA es al (número) AΓ, sea así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de HΘ [X 6]. Pero ZH es una (recta) expresable; entonces HΘ es también expresable. Y dado que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de ΘH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Entonces ZH es inconmensurable en longitud con ΘH [X 9]. Luego ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ZΘ es binomial [X 36].



Digo que también es tercera.

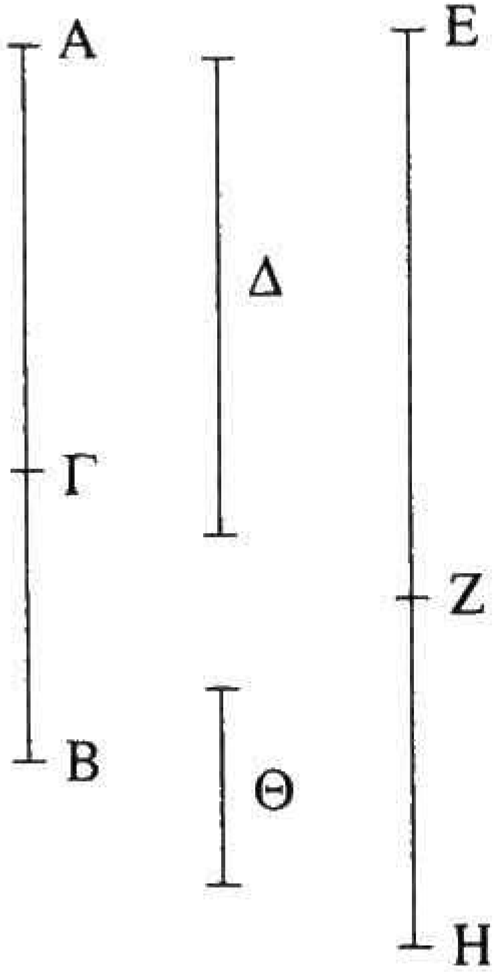
Así pues, dado que como Δ es a AB, así el (cuadrado) de E es al (cuadrado) de ZH, mientras que, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por igualdad, como Δ es a AΓ, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de HΘ [V 22]. Pero Δ no guarda con ΑΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de Ε tampoco guarda con el cuadrado de ΗΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego Ε es inconmensurable en longitud con ΗΘ [X 9]. Ahora bien, dado que, como ΒΑ es a ΑΓ, así el (cuadrado) de ΖΗ al (cuadrado) de ΗΘ, entonces el (cuadrado) de ΖΗ es mayor que el (cuadrado) de ΗΘ. Pues bien, sean los (cuadrados) de ΗΘ, Κ iguales al (cuadrado) de ΖΗ; entonces, por conversión, como ΑΒ es a ΒΓ, así el (cuadrado) de ΖΗ al (cuadrado) de Κ [V 19 Por.]. Pero ΑΒ guarda con ΒΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ΖΗ guarda con el (cuadrado) de Κ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ΖΗ es conmensurable en longitud con Κ [X 9]. Por tanto, el cuadrado de ΖΗ es mayor que el cuadrado de ΗΘ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΖΗ). Y ΖΗ, ΗΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de ellas es conmensurable en longitud con Ε.

Por consiguiente, ΖΘ es una tercera binomial. Q. E. D.

Proposición 51

Hallar una (recta) cuarta binomial.

Pónganse dos números ΑΓ, ΓΒ de modo que ΑΒ no guarde ni con ΒΓ, ni con ΑΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Póngase la recta expresable Δ y sea la (recta) ΕΖ conmensurable en longitud con Δ; entonces ΕΖ es expresable. Y hágase de forma que, como el número ΒΑ es al (número) ΑΓ, sea así el (cuadrado) de ΕΖ al (cuadrado) de ΖΗ [X 6 Por.]. Entonces el (cuadrado) de ΕΖ es conmensurable con el (cuadrado) de ΖΗ [X 6]. Luego ΖΗ es también expresable. Y dado que ΒΑ no guarda con ΑΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el (cuadrado) de ΕΖ guarda con el (cuadrado) de ΖΗ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces ΕΖ es inconmensurable en longitud con ΖΗ [X 9]. Luego ΕΖ, ΖΗ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; de modo que ΕΗ es binomial.



Digo ahora que también es cuarta.

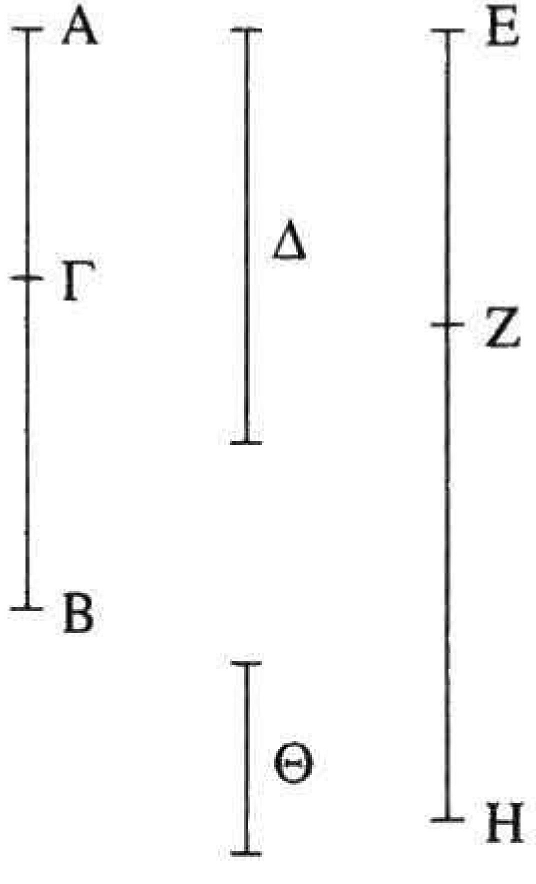
Pues, dado que como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces el (cuadrado) de EZ es mayor que el (cuadrado) de ZH. Pues bien, sean los (cuadrados) de ZH, Θ iguales al (cuadrado) de EZ; entonces, por conversión, como el número AB es al (número) BΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Por tanto, el cuadrado de EZ es mayor que el de HZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (EZ). Ahora bien, EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y EZ es conmensurable en longitud con Δ.

Por consiguiente, EH es una cuarta binomial. Q. E. D.

Proposición 52

Hallar una (recta) quinta binomial.

Pónganse dos números ΑΓ, ΓΒ de modo que ΑΒ no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una (recta) expresable cualquiera Δ, y sea la (recta) ΕΖ conmensurable con Δ; entonces ΕΖ es expresable. Hágase de forma que como ΓΑ es a ΑΒ, sea así el (cuadrado) de ΕΖ al (cuadrado) de ΖΗ [X 6 Por.]. Pero ΓΑ no guarda con ΑΒ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ΕΖ tampoco guarda con el (cuadrado) de ΖΗ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ΕΖ, ΖΗ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 9]. Por tanto, ΕΗ es binomial [X 36].



Digo ahora que también quinta.

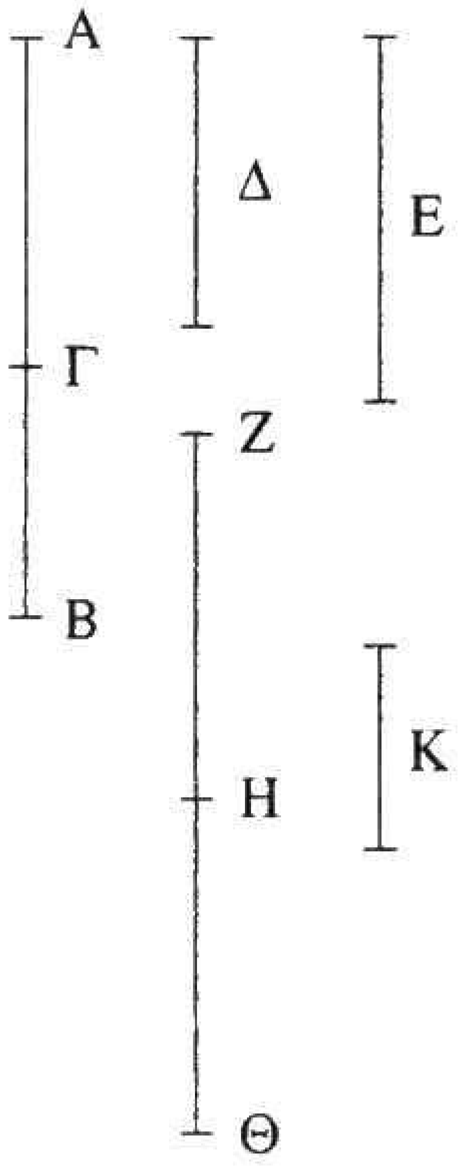
Pues, dado que, como ΓΑ es a ΑΒ, así el (cuadrado) de ΕΖ al (cuadrado) de ΖΗ, entonces, por inversión, como ΒΑ es a ΑΓ, así el (cuadrado) de ΖΗ al (cuadrado) de ΖΕ. Luego el (cuadrado) de ΗΖ es mayor que el (cuadrado) de ΖΕ. Pues bien, sean los (cuadrados) de ΕΖ, Θ iguales al (cuadrado) de ΗΖ; entonces, por conversión, como el número ΑΒ es al (número) ΒΓ, así el (cuadrado) de ΗΖ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero ΑΒ no guarda con ΒΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ΖΗ tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ΖΗ es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]; de modo que el (cuadrado) de ΖΗ es mayor que el (cuadrado) de ΖΕ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y HZ, ZE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el término menor EZ es conmensurable en longitud con la recta expresable dada Δ.

Por consiguiente, EH es una quinta binomial. Q. E. D.

Proposición 53

Hallar una (recta) sexta binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB, de modo que AB no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y haya también otro número Δ que no sea cuadrado y no guarde con ninguno de los (números) BA, AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una (recta) expresable E, y hágase de forma que, como Δ es a AB, sea así también el (cuadrado) de E al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de E es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Ahora bien, E es expresable; luego ZH es también expresable. Y como Δ no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de E tampoco guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Además hágase de forma que, como BA es a AΓ, así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de ΘH; luego el (cuadrado) de ΘH es expresable; por tanto, ΘH es expresable. Y puesto que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el (cuadrado) de ZH guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces ZH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Luego ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, ZΘ es binomial [X 36].



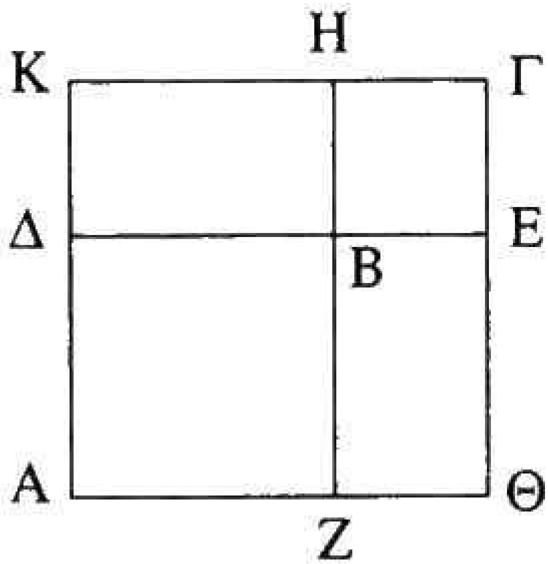
Hay que demostrar ahora que también es sexta.

Pues bien, dado que como Δ es a AB, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de ZH, pero también, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por igualdad, como Δ es a AΓ, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de HΘ [V 22]. Pero Δ no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de E no guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Pero se ha demostrado que es también inconmensurable con ZH; entonces cada una de las (rectas) ZH, HΘ es inconmensurable en longitud con E. Y dado que, como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el (cuadrado) de HΘ. Sean, pues, los cuadrados de HΘ, K iguales al (cuadrado) de ZH; entonces, por conversión, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de K [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; de modo que el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]; entonces el cuadrado de ZH es mayor que el de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Ahora bien, ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de ellas es conmensurable en longitud con la recta expresable dada E.

Por consiguiente, ZΘ es una sexta binomial. Q. E. D.

LEMA

Sean AB, BΓ dos cuadrados y pónganse de modo que ΔB esté en línea recta con BE; entonces ZB está también en línea recta con BH. Complétese el paralelogramo AΓ.



Digo que AΓ es un cuadrado y que ΔH es media proporcional de AB, BΓ y además ΔΓ es media proporcional de AΓ, ΓB.

Pues como ΔB es igual a BZ, y BE a BH, entonces la (recta) entera ΔE es igual a la (recta) entera ZH. Pero ΔE es igual a cada una de las (rectas) AΘ, KΓ, mientras que ZH es igual a cada una de las (rectas) AK, ΘΓ [I 34]. Entonces, las (rectas) AΘ, KΓ son iguales respectivamente a las (rectas) AK, ΘΓ. Luego el paralelogramo AΓ es equilátero. Pero también es rectangular; entonces AΓ es un cuadrado.

Y dado que, como ZB es a BH, así ΔB a BE, mientras que, como ZB es a BH, así AB a ΔH, y como ΔB es a BE, así ΔH a BΓ [VI 1], entonces también, como AB es a ΔH, así ΔH a BΓ [V 11]; luego ΔH es media proporcional de AB, BΓ.

Digo ahora que ΔΓ es también media proporcional de AΓ, ΓB.

Pues, dado que, como AΔ es a ΔK, así KH a HΓ, porque son iguales respectivamente, y, por composición, como AK es a KΔ, así KΓ es a ΓH [V 18], mientras que, como AK es a KΔ, así AΓ a ΓΔ, y como KΓ es a ΓH, así ΔΓ a ΓB [VI 1], entonces, como AΓ es a ΔΓ, así también ΔΓ a BΓ [V 11].

Por consiguiente, ΔΓ es media proporcional de AΓ, ΓB. (Que es) lo que se ha propuesto demostrar[35].

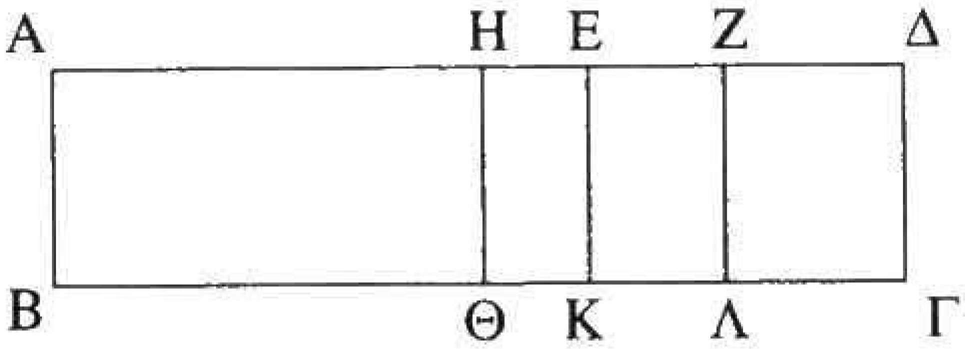
PROPOSICIÓN 54

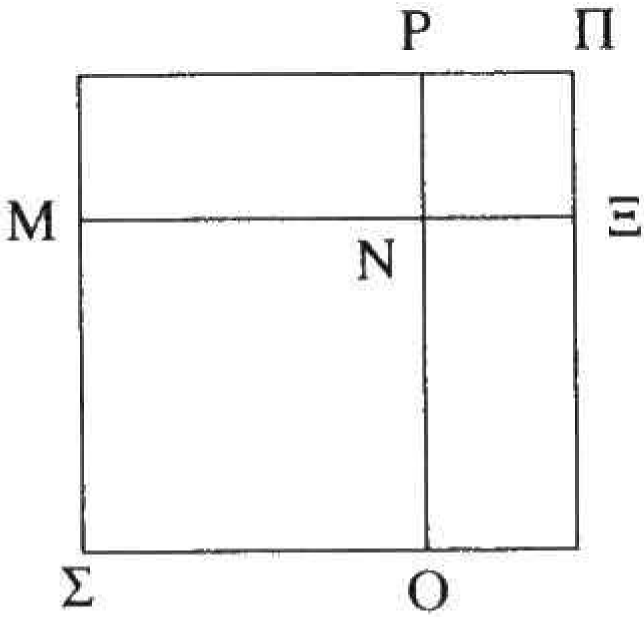
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera binomial, el lado del cuadrado equivalente al (área) es la (recta) no expresable llamada binomial.

Esté comprendida, pues, el área ΑΓ por la (recta) expresable ΑΒ y la primera binomial ΑΓ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) ΑΓ es la (recta) no expresable llamada binomial.

Pues como ΑΔ es una (recta) primera binomial, divídase en sus términos por el (punto) Ε, y sea ΑΕ el término mayor. Queda claro, entonces, que ΑΕ, ΕΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de ΑΕ es mayor que el de ΕΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΑΕ), y ΑΕ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada ΑΒ [X Segundas definiciones 1]. Divídase, pues, ΕΔ en dos partes iguales por el punto Ζ. Y como el cuadrado de ΑΕ es mayor que el de ΕΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΑΕ), entonces, si se aplica a la (recta) mayor ΑΕ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor, es decir, al cuadrado de ΕΖ y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Aplíquese, pues, a ΑΕ el (rectángulo comprendido) por ΑΗ, ΗΕ igual al cuadrado de ΕΖ; entonces ΑΗ es conmensurable en longitud con ΕΗ. Trácense, a partir de los (puntos) Η, Ε, Θ, las rectas ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ paralelas a cada una de las (rectas) ΑΒ, ΓΔ; y constrúyase el cuadrado ΣΝ igual al paralelogramo ΑΘ, y el (cuadrado) ΝΠ igual al (paralelogramo) ΗΚ [II 14], y hágase de forma que ΜΝ esté en línea recta con ΝΞ; entonces ΡΝ está en línea recta con ΝΟ. Y complétese el paralelogramo ΣΠ; entonces ΣΠ es un cuadrado [Lema]. Y como el (rectángulo comprendido) por ΑΗ, ΗΕ es igual al (cuadrado) de ΕΖ, entonces, como ΑΗ es a ΕΖ, así ΖΕ a ΕΗ [VI 17]; luego como ΑΘ es a ΕΛ, ΕΛ es a ΚΗ [VI 1]; por tanto, ΕΛ es media proporcional de ΑΘ, ΗΚ. Pero ΑΘ es igual a ΣΝ, y ΗΚ es igual a ΝΠ; luego ΕΛ es media proporcional de ΣΝ, ΝΠ. Pero ΜΡ es media proporcional de los mismos ΣΝ, ΝΠ [Lema]; luego ΕΛ es igual a ΜΡ; de modo que también es igual a ΟΞ: pero ΑΘ, ΗΚ son iguales a ΣΝ, ΝΠ; entonces el (paralelogramo) entero ΑΓ es igual al (paralelogramo) entero ΣΠ, es decir, al cuadrado de ΜΞ; entonces ΜΞ es el lado del cuadrado equivalente a ΑΓ.





Digo que MΞ es binomial.

Pues como AH es conmensurable con HE, AE es también conmensurable con cada una de las (rectas) AH, HE [X 15]. Pero se ha supuesto que AE es también conmensurable con AB; luego AH, HE son conmensurables con AB [X 12]; y AB es expresable, luego cada una de las (rectas) AH, HE es también expresable; por tanto, cada uno de los (rectángulos) AΘ, HK es expresable [X 19], y AΘ es conmensurable con HK. Pero AΘ es igual a ΣN y HK a NΠ; entonces ΣN, NΠ, es decir, los cuadrados de MN, NΞ son expresables y conmensurables. Ahora bien, dado que AE es inconmensurable en longitud con EΔ, mientras que AE es conmensurable con AH, y ΔE es conmensurable con EZ, entonces AH es inconmensurable con EZ [X 13]; de modo que AΘ es inconmensurable con EΛ [V 1; X 11]. Pero AΘ es igual a ΣN, y EΛ a MP; entonces ΣN es inconmensurable con MP. Pero como ΣN es a MP, ON es a NP [VI 1]; luego ON es inconmensurable con NP [X 11]. Pero ON es igual a MN, y NP a NΞ. Luego MN es inconmensurable con NΞ. Y el cuadrado de MN es conmensurable con el (cuadrado) de NΞ, y cada uno de ellos es expresable; por tanto MN, NΞ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado.

Por consiguiente, ΜΞ es binomial y el lado del cuadrado equivalente a ΑΓ. Q. E. D.

Proposición 55

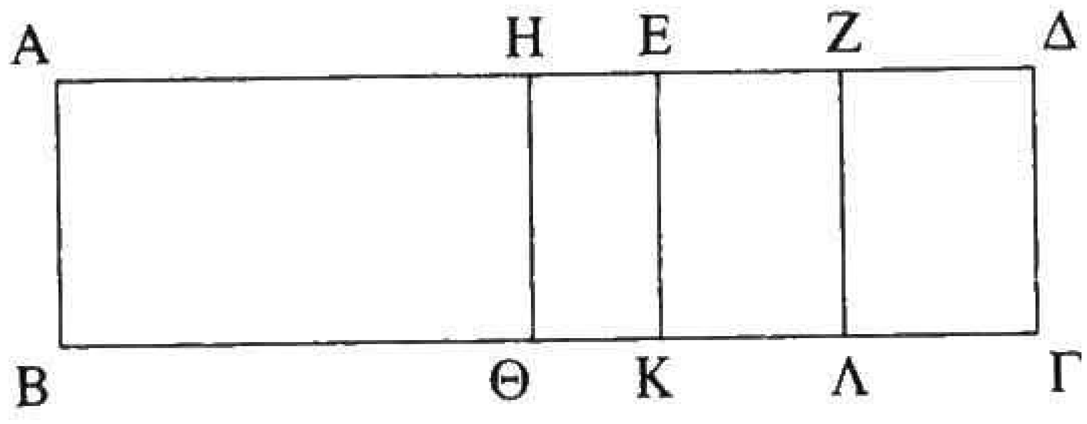
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una segunda binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada primera bimedial.

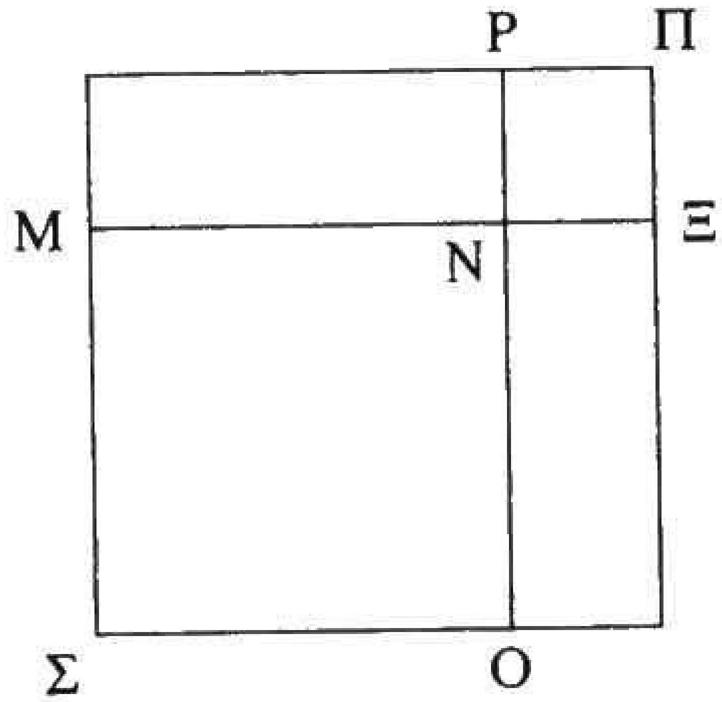
Esté, pues, comprendida el área ΑΒΓΔ por la (recta) expresable ΑΒ y la segunda binomial ΑΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área ΑΓ es una (recta) primera bimedial.

Pues como ΑΔ es una (recta) segunda binomial, divídase en sus términos por el (punto) Ε, de modo que ΑΕ sea el término mayor; entonces ΑΕ, ΕΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de ΑΕ es mayor que el de ΕΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΑΕ), y el término menor ΕΔ es conmensurable en longitud con ΑΒ [X, segundas definiciones, 2]. Divídase ΕΔ en dos partes iguales por el (punto) Ζ, y aplíquese a ΑΕ el rectángulo ΑΗΕ igual al cuadrado de ΕΖ y deficiente en la figura de un cuadrado. Entonces ΑΗ es conmensurable en longitud con ΗΕ [X 17]. Y trácense por los (puntos) Η, Ε, Ζ las (rectas) ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ paralelas a ΑΒ, ΓΔ, y constrúyase el cuadrado ΣΝ, igual al paralelogramo ΑΘ, y el cuadrado ΝΠ igual al (paralelogramo) ΗΚ, y hágase de modo que ΜΝ, ΝΞ estén en línea recta. Entonces ΡΝ está también en línea recta con ΝΟ. Complétese el cuadrado ΣΠ; queda claro, entonces, a partir de lo demostrado anteriormente, que ΜΡ es media proporcional de ΣΝ, ΝΠ y es igual a ΕΛ y que ΜΞ es el lado del cuadrado equivalente al área ΑΓ. Hay que demostrar ahora que ΜΞ es una (recta) primera bimedial. Puesto que ΑΕ es inconmensurable en longitud con ΕΔ, mientras que ΕΔ es conmensurable con ΑΒ, entonces ΑΕ es inconmensurable con ΑΒ [X 13]. Ahora bien, puesto que ΑΗ es conmensurable con ΕΗ, ΑΕ es conmensurable también con cada una de las (rectas) ΑΗ, ΗΕ [X 15]. Pero ΑΕ es inconmensurable en longitud con ΑΒ; luego ΑΗ, ΗΕ son inconmensurables también con ΑΒ [X 13]. Por tanto ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ (es decir: ΒΑ, ΑΗ y ΒΑ, ΗΕ) son (pares de) rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado[36]; de modo que cada uno de los (rectángulos) ΑΘ, ΗΚ es medial [X 21]. De manera que cada uno de los (rectángulos) ΑΘ, ΗΚ es medial [X 21]. De manera que cada uno de los (cuadrados) ΣΝ, ΝΠ es también medial. Entonces las (rectas) ΜΝ, ΝΞ son también mediales. Y dado que ΑΗ es conmensurable en longitud con ΗΕ, el (rectángulo) ΑΘ es conmensurable también con el (rectángulo) ΗΚ [VI 1; X 11], es decir el (cuadrado) de ΣΝ con el (cuadrado) de ΝΠ, es decir el (cuadrado) de ΜΝ con el (cuadrado) de ΝΞ. Ahora bien, como ΑΕ es inconmensurable en longitud con ΕΔ, mientras que ΑΕ es conmensurable con ΑΗ, y ΕΔ es conmensurable con ΕΖ, entonces ΑΗ es inconmensurable con ΕΖ [X 13]; de modo que el (rectángulo) ΑΘ es inconmensurable con el (rectángulo) ΕΛ, es decir el (cuadrado) ΣΝ con el (cuadrado) ΜΡ, esto es la (recta) ΟΝ con la (recta) ΝΡ [VI

1; X 11]. Es decir, MN es inconmensurable en longitud con NΞ. Pero se ha demostrado que MN, NΞ son tanto mediales como conmensurables en cuadrado; entonces MN, NΞ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado.





Digo además que comprenden un (rectángulo) expresable.

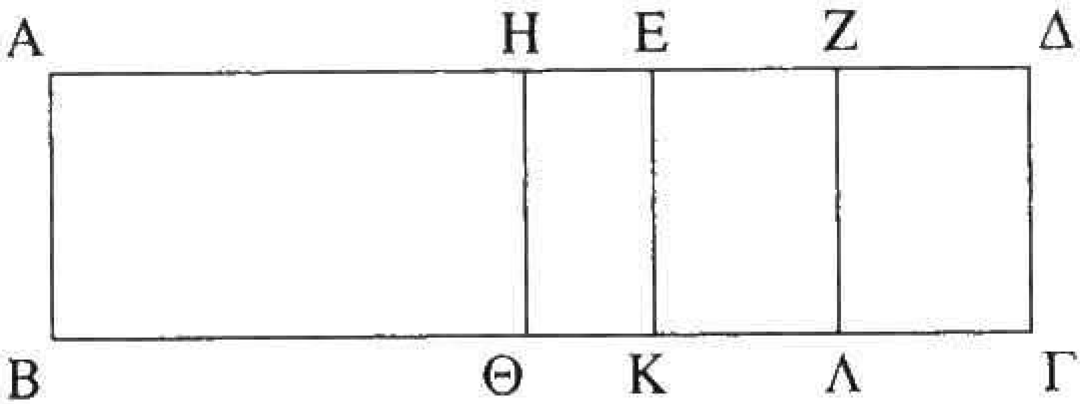
Pues como se ha supuesto que ΔE es conmensurable con cada una de las (rectas) AB, EZ, entonces EZ lo es también con EK. Y cada una de ellas es expresable. Por tanto, EΛ, es decir MP es expresable [X 19]; pero MP es el rectángulo MNΞ. Ahora bien, si se suman dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable, la (recta) entera no es expresable y se llama primera bimedial [X 37].

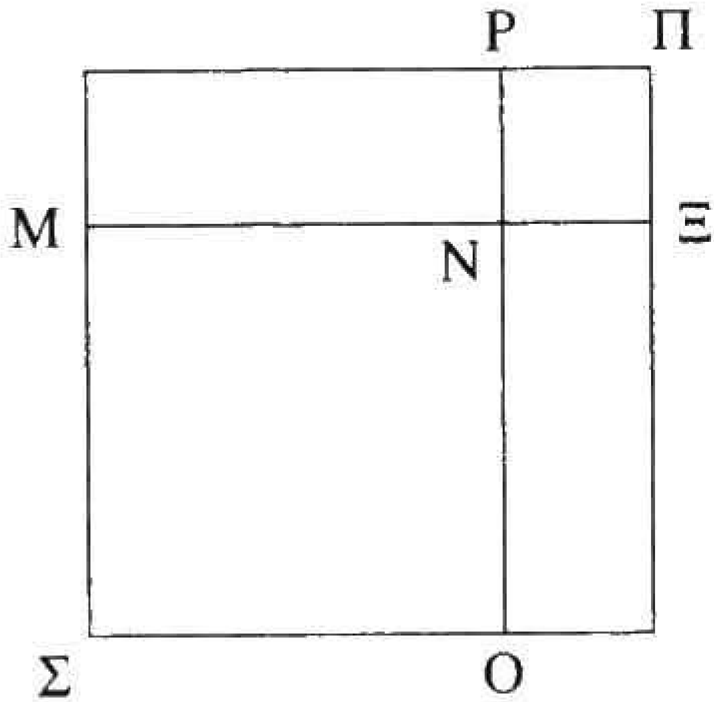
Por consiguiente, MΞ es una primera bimedial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 56

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada segunda bimedial.

Sea, pues, comprendida el área ΑΒΓΔ por la (recta) expresable ΑΒ y la tercera binomial ΑΔ dividida por el (punto) Ε en sus términos, de los cuales el mayor es ΑΕ.





Digo que el lado del cuadrado equivalente al área ΑΓ es la (recta) no expresable llamada segunda bimedial.

Sígase, pues, la misma construcción de la proposición anterior. Y como AΔ es una tercera binomial, entonces AE, EΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de EΔ en el (cuadrado) de una recta conmensurable con ella (AE), y ninguno de los (términos) AE, EΔ es conmensurable en longitud con AB [X Segundas Definiciones 3].

De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ, y MN, NΞ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado; de modo que MΞ es bimedial.

Hay que demostrar ahora que es también segunda.

Puesto que ΔE es inconmensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que ΔE es conmensurable con EZ, entonces EZ es inconmensurable en longitud con EK [X 13]. Y son expresables; entonces ZE, EK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego EΛ, es decir MP, es medial [X 21], y está comprendido por MN, NΞ; entonces el (rectángulo comprendido) por MN, NΞ es medial.

Por consiguiente, MΞ es una segunda bimedial.

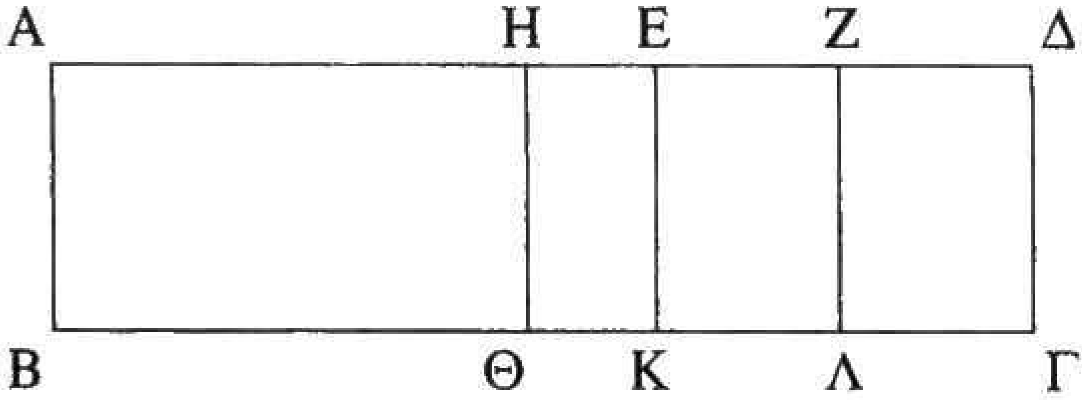
Proposición 57

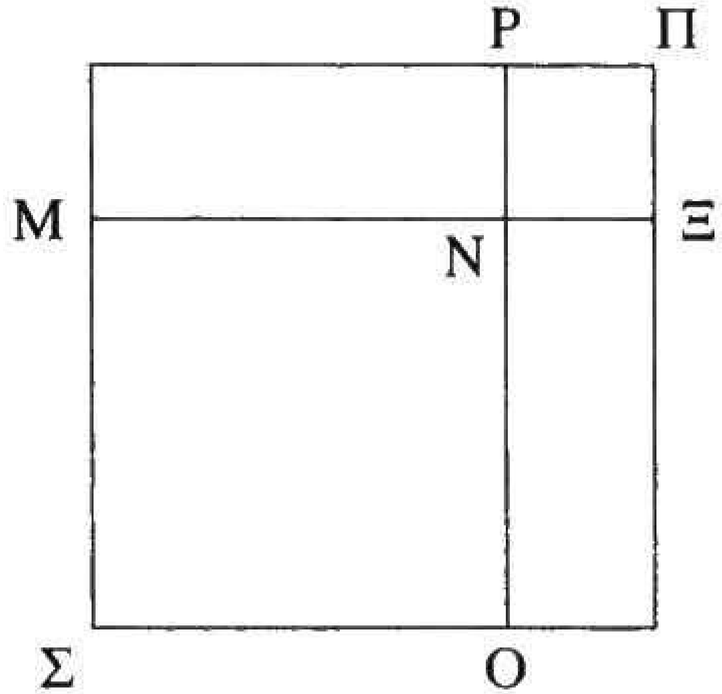
Si un área está comprendida por una recta expresable y una cuarta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada «mayor».

Esté, pues, comprendida el área AΓ por la (recta) expresable AB y la cuarta binomial AΔ, dividida por el (punto) E en sus términos, de los cuales sea mayor AE.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΓ es la (recta) no expresable llamada «mayor».

Pues como AΔ es una cuarta binomial, entonces AE, EΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de EΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), y AE es conmensurable en longitud con AB [X segundas definiciones 4]. Divídase ΔE en dos partes iguales por el (punto) Z, y aplíquese a AE un paralelogramo, el (rectángulo comprendido) por AH, HE, igual al (cuadrado) de EZ. Entonces AH es inconmensurable en longitud con HE [X 18]; trácense HΘ, EK, ZΛ paralelas a AB, y sígase la misma construcción que en las proposiciones anteriores; queda claro, entonces, que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ.





Hay que demostrar ahora que MΞ es la (recta) no expresable llamada «mayor». Puesto que AH es inconmensurable en longitud con EH, el (rectángulo) AΘ es inconmensurable también con el (rectángulo) HK, es decir el (cuadrado) ΣN con el cuadrado NΠ; entonces MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado. Y como AE es conmensurable en longitud con AB, AK es expresable [X 19]; y es igual a los (cuadrados) de MN, NΞ; entonces la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es también expresable. Ahora bien, puesto que ΔE es inconmensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que ΔE es conmensurable con EZ, entonces EZ es inconmensurable en longitud con EK [X 13]. Por tanto, EK, EZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego AE, es decir MP, es medial [X 21]. Y está comprendida por MN, NΞ; luego el (rectángulo comprendido) por MN, NΞ es medial. Y la [suma] de los (cuadrados) de MN, NΞ es expresable, y MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado. Pero, si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial, la recta entera no es expresable y se llama «mayor» [X 39].

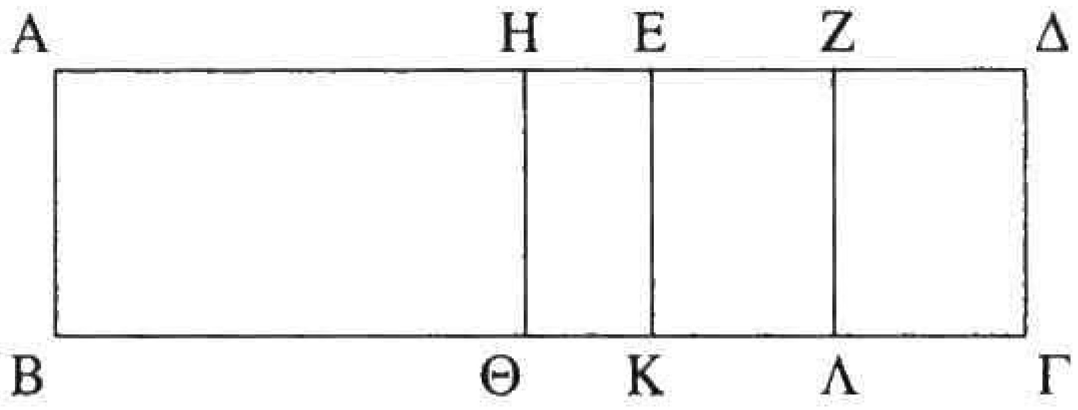
Por consiguiente, MΞ es la (recta) no expresable llamada «mayor» y es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ. Q. E. D.

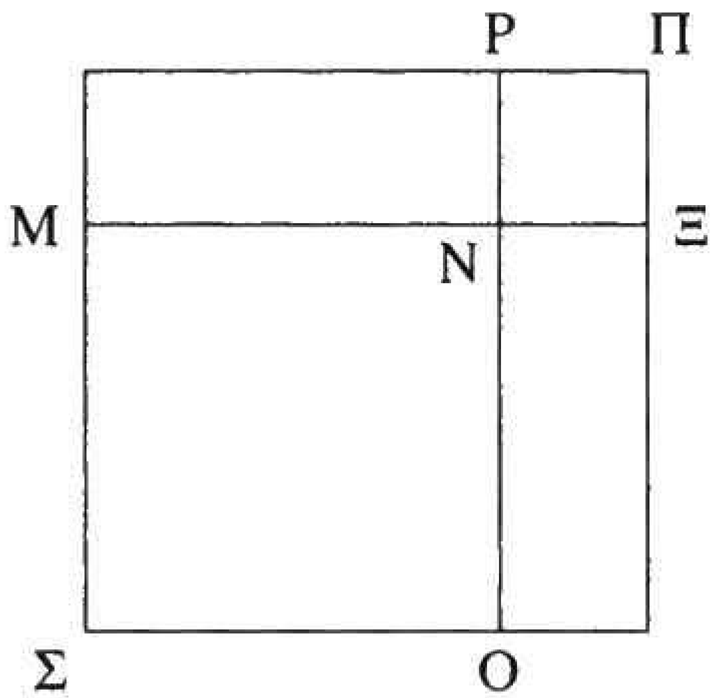
Proposición 58

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

Esté, pues, comprendida el área AΓ por la (recta) expresable AB y la quinta binomial AΔ dividida en sus términos por el (punto) E, de modo que AE sea el término mayor.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΓ es la (recta) no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.





Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Queda claro, entonces, que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ.

Hay que demostrar ahora que MΞ es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial. Pues como AH es inconmensurable con HE [X 18], entonces AΘ es inconmensurable con ΘE [VI 1; X 11], es decir el cuadrado de MN con el cuadrado de NΞ; entonces MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado. Y como AΔ es una quinta bimedial, y el segmento EΔ es su segmento menor, entonces EΔ es conmensurable en longitud con AB [X segundas definiciones 5]. Pero AE es inconmensurable con EΔ; entonces AB es también inconmensurable en longitud con AE [X 13]; luego AK, es decir la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es medial [X 21]. Y como ΔE es conmensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que ΔE es conmensurable con EZ, entonces EZ es conmensurable con EK [X 12]. Luego EK es expresable; entonces EΛ, es decir MP, esto es el (rectángulo) MNΞ es también expresable

[X 19]; luego MN, NΞ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable.

Por consiguiente, MΞ es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial [X 40] y es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ. Q. E. D.

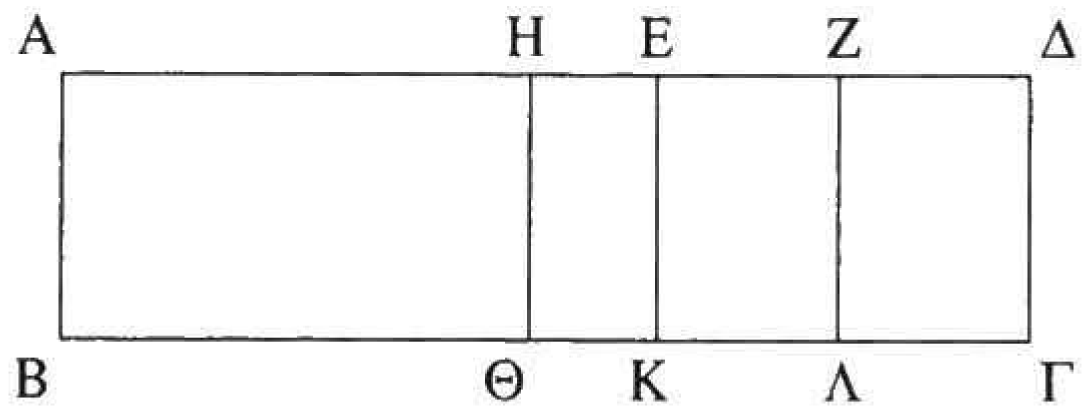
Proposición 59

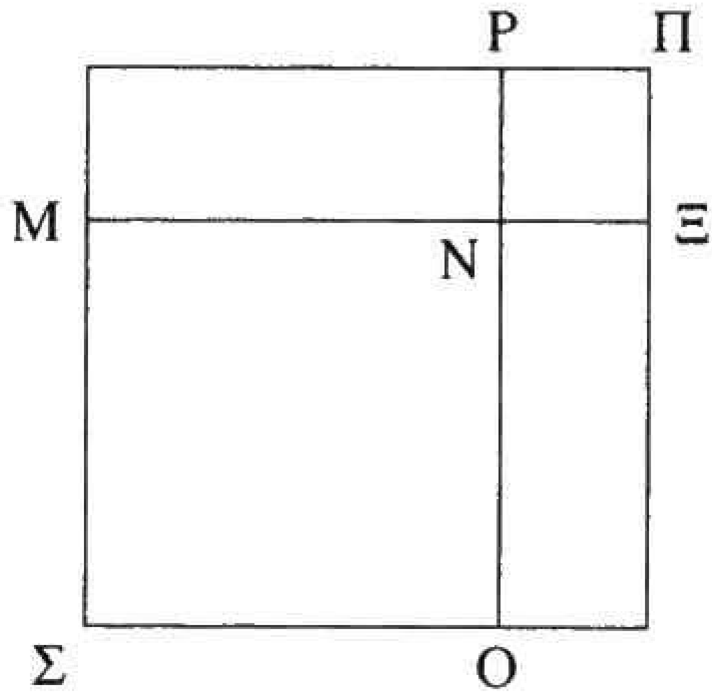
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Esté, pues, comprendida el área ABΓΔ por la (recta) expresable AB y la sexta binomial AΔ, dividida en sus términos por el (punto) E de modo que AE sea el término mayor.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) AΓ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Queda claro, entonces, que MΞ es el lado del cuadrado equivalente al (área) AΓ y que MN es inconmensurable en cuadrado con NΞ. Y como EA es inconmensurable en longitud con AB, entonces EA, AB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; entonces AK, es decir la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es medial [X 21]: puesto que EΔ es a su vez inconmensurable en longitud con AB, entonces ZE es también inconmensurable en longitud con EK [X 13]; luego ZE, EK son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto EΛ, es decir MP, esto es el (rectángulo) MN, NΞ es también medial [X 21]. Y como AE es inconmensurable con EZ, AK es también inconmensurable con EΛ [VI 1; X 11]. Pero AK es la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ y EΛ es el (rectángulo) MN, NΞ; luego la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es inconmensurable con el (rectángulo) MN, NΞ. Ahora bien, cada uno de ellos es medial y las (rectas) MN, NΞ son inconmensurables en cuadrado.





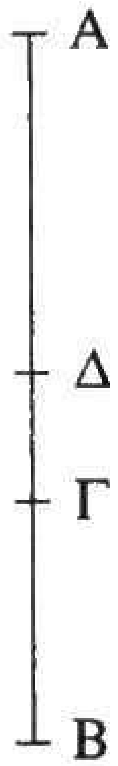
Por consiguiente, MΞ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales [X 41] y el lado del cuadrado equivalente a AΓ. Q. E. D.

[LEMA

Si una línea recta se corta en (partes) desiguales, los cuadrados de las (partes) desiguales son mayores que el doble del rectángulo comprendido por las partes desiguales.

Sea AB la recta y córtese en partes desiguales por el (punto) Γ, y sea AΓ la mayor.

Digo que los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB.



Divídase AB en dos partes iguales por el (punto) Δ. Pues bien, como una línea recta ha sido cortada en (partes) iguales por el (punto) Δ y en (partes) desiguales por el (punto) Γ, entonces el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB junto con el (cuadrado) de ΓΔ es igual al (cuadrado) de AΔ [II 5]; de modo que el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es menor que el (cuadrado) de AΔ; luego el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es menor que el doble del (cuadrado) de AΔ. Pero los (cuadrados) de AΓ, ΓB son el doble de los de AΔ, ΔΓ [II 9].

Por consiguiente, los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Q. E. D][37].

Proposición 60

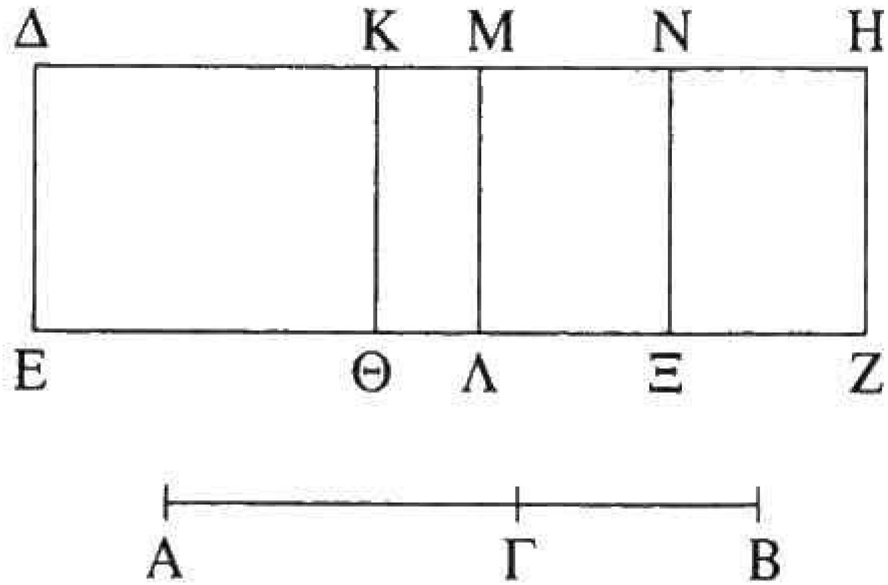
El cuadrado de una binomial aplicado a una recta expresable produce como anchura una primera binomial.

Sea la (recta) binomial AB dividida en sus términos por el (punto) Γ de modo que AΓ sea el término mayor; y póngase la (recta) expresable ΔE, y aplíquese a ΔE el (paralelogramo) ΔEZH igual al cuadrado de AB y que produzca la anchura ΔH.

Digo que ΔH es una primera binomial.

Pues aplíquese a ΔE el (rectángulo) ΔΘ igual al (cuadrado) de AΓ, y el (rectángulo) KΛ igual al (cuadrado) de BΓ; entonces el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es igual a MZ. Divídase la (recta) MH en dos partes iguales por el (punto)

N y trácese NΞ paralela [a cada una de las (rectas) MΛ, HZ]. Entonces cada uno de los (rectángulos) MΞ, NZ es igual a una vez el (rectángulo) AΓ, ΓB. Y como AB es una binomial dividida en sus términos por el (punto) Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36]; luego los (cuadrados) de AΓ, ΓB son expresables y conmensurables entre sí; de modo que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es también expresable [X 15]. Y es igual a ΔΛ. Entonces ΔΛ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔE, luego la (recta) ΔM es expresable y conmensurable en longitud con ΔE [X 20]. Puesto que AΓ, ΓB son a su vez (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, es decir MZ es medial [X 21]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable MΛ; entonces la (recta) MH es también expresable e inconmensurable en longitud con MΛ, es decir con ΔE [X 22]. Pero MΔ es también expresable y conmensurable en longitud con ΔE; entonces ΔM es inconmensurable en longitud con MH [X 13]. Y son expresables; entonces ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔH es binomial [X 36].



Hay que demostrar que también es primera.

Pues como el (rectángulo) AΓ, ΓB es media proporcional de los (cuadrados de AΓ, ΓB [Lema después de X 53], entonces MΞ es también media proporcional de ΔΘ, KΛ; por tanto, como ΔΘ es a MΞ, así MΞ a KΛ, es decir, como ΔK es a MN, así MN a MK [VI 1]; luego el (rectángulo comprendido) por ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN [VI 17]. Y como el (cuadrado) de AΓ es conmensurable con el de ΓB, ΔΘ es también conmensurable con KΛ; de modo que la (recta) ΔK es también conmensurable con la (recta) KM [VI 1; X 11]. Y puesto que los (cuadrados) de AΓ, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB [Lema], entonces ΔΛ es también mayor que MZ; de modo que ΔM es también mayor que MH [VI 1]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN, es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de MH, y ΔK es conmensurable con KM. Pero si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) conmensurables, el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor) [X 17]; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el cuadrado de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔM). Ahora bien, ΔM, MH son rectas expresables, y ΔM que es el término mayor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una primera binomial. Q. E. D.

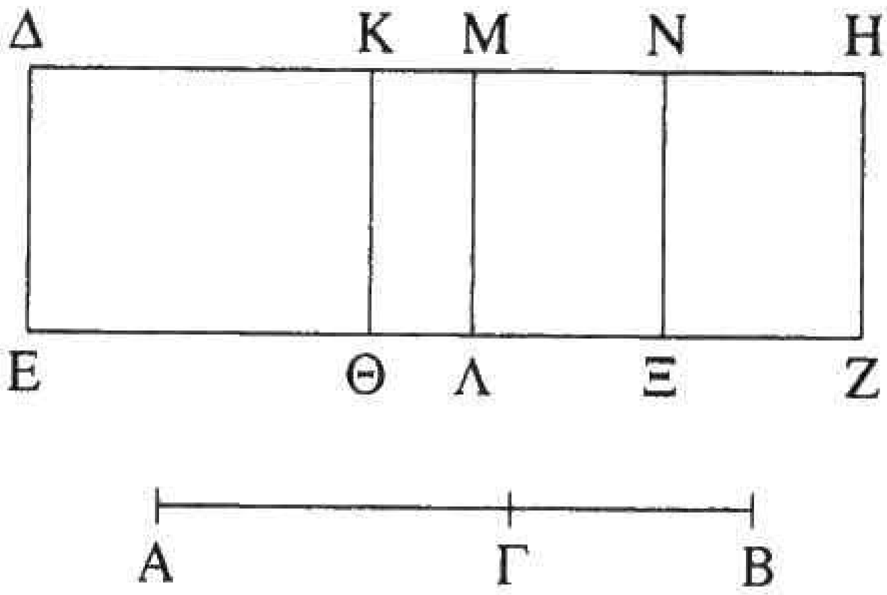
Proposición 61

El cuadrado de una (recta) primera bimedial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una segunda binomial.

Sea AB la (recta) primera bimedial dividida en sus mediales por el punto Γ, de las cuales AΓ es la mayor; póngase la recta expresable ΔE y aplíquese a ΔE un paralelogramo ΔZ igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΔH.

Digo que ΔH es una segunda binomial.

Sígase, pues, la misma construcción de los (teoremas) anteriores, y como AB es una primera bimedial dividida por el punto Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable [X 37]; de modo que los (cuadrados) de AΓ, ΓB son también mediales [X 21]. Luego ΔΛ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la recta expresable ΔE; luego MΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es a su vez expresable, MZ es también expresable. Y se ha aplicado a la recta expresable MΛ; luego MH es también expresable y conmensurable en longitud con MΛ, es decir con ΔE [X 20]; entonces ΔM es inconmensurable en longitud con MH [X 13]; y son expresables; así pues, ΔM, MH son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔH es binomial [X 36].



Hay que demostrar ahora que es también segunda.

Pues como los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ, entonces ΔΛ es también mayor que ΜΖ; de modo que ΔΜ es también (mayor) que ΜΗ [VI 1]. Y puesto que el (cuadrado) de ΑΓ es conmensurable con el (cuadrado) de ΓΒ, ΔΘ es también conmensurable con ΚΛ; de modo que la (recta) ΔΚ es también conmensurable con ΚΜ [VI 1; X 11]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΔΚ, ΚΜ es igual al (cuadrado) de ΜΝ; por tanto, el cuadrado de ΔΜ es mayor que el de ΜΗ en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔΜ) [X 17]. Y ΜΗ es conmensurable en longitud con ΔΕ

Por consiguiente ΔΗ es una segunda binomial.

Proposición 62

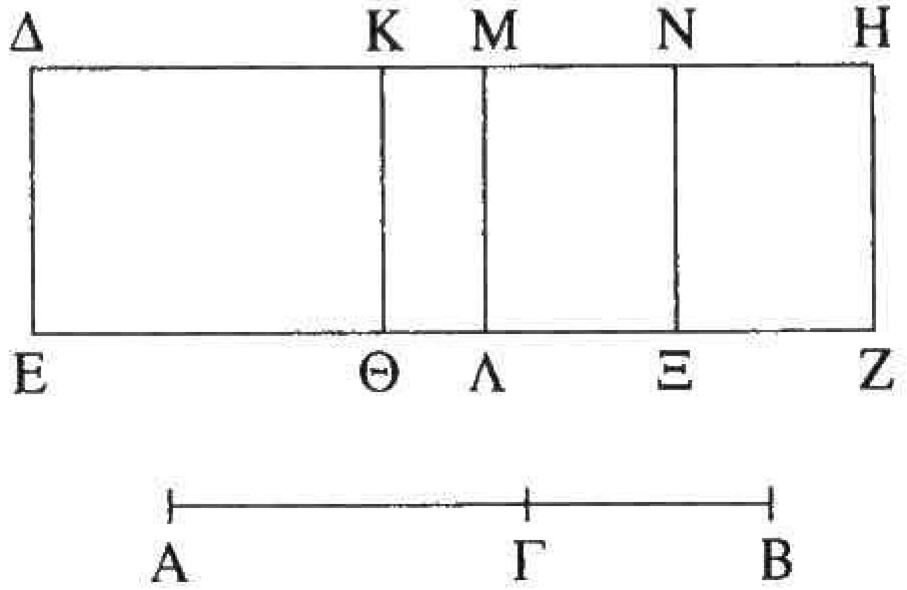
El cuadrado de una recta segunda bimedial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una tercera binomial.

Sea ΑΒ la (recta) segunda bimedial dividida en sus mediales por el (punto) Γ, de modo que ΑΓ sea el segmento mayor; y sea ΔΕ una (recta) expresable, y aplíquese a ΔΕ el paralelogramo ΔΖ igual al cuadrado de ΑΒ que produzca como anchura ΔΗ.

Digo que ΔΗ es una tercera binomial.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Y como ΑΒ es una segunda bimedial dividida por el (punto) Γ, entonces ΑΓ, ΓΒ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial [X 38]; de modo que la suma de los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y es igual a ΔΛ; luego ΔΛ es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable ΔΕ; así pues ΜΔ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔΕ [X 22].

Por lo mismo MH es entonces también expresable e inconmensurable en longitud con MΛ, es decir con ΔE; luego cada una de las (rectas) ΔM, MH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE. Ahora bien, puesto que AΓ es inconmensurable en longitud con ΓB, mientras que, como AΓ es a ΓB, así el (cuadrado) de AΓ al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, entonces, el (cuadrado) de AΓ es también inconmensurable con el (rectángulo) AΓ, ΓB [X 11]. De modo que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es también inconmensurable con el doble del (rectángulo) AΓ, ΓB [X 12 y 13], es decir, ΔΛ con MZ; de modo que ΔM es también inconmensurable con MH [VI 1 y X 11]. Y son expresables; por tanto, ΔH es una binomial [X 36].



Hay que demostrar ahora que también es tercera.

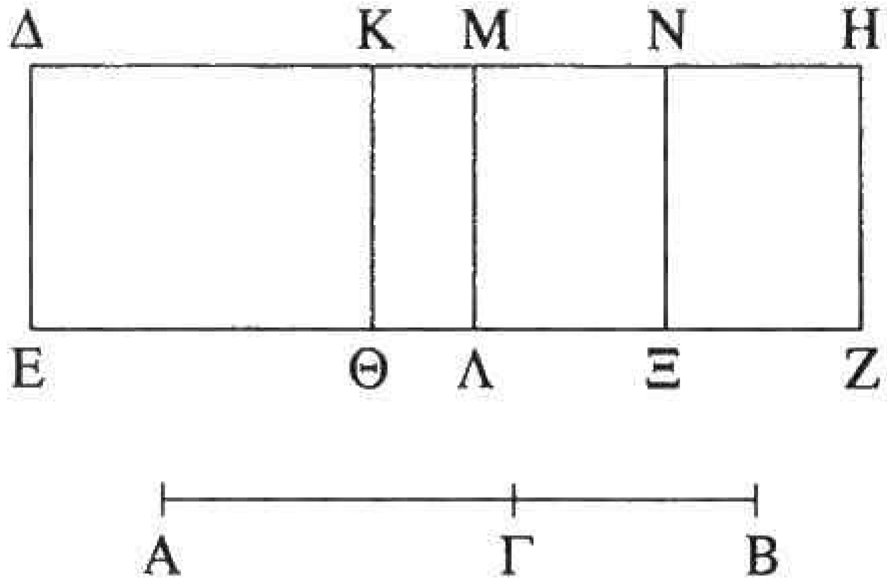
De manera semejante a los (teoremas) anteriores concluiríamos que ΔM es mayor que MH, y ΔK es conmensurable con KM. Y el (rectángulo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella [ΔM]. Y ninguna de las (rectas) ΔM, MH es conmensurable en longitud con ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una tercera binomial [X Seg. Def. 3]. Q. E. D.

Proposición 63

El cuadrado de una recta «mayor» aplicado a una recta expresable produce como anchura una cuarta binomial.

Sea AB una recta «mayor» dividida por el (punto) Γ de modo que AΓ sea mayor que ΓB y (sea) ΔE una (recta) expresable y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al cuadrado de AB que produzca como anchura ΔH.



Digo que ΔH es una cuarta binomial.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Y como AB es una (recta) «mayor» dividida por el punto Γ, AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial [X 39]. Así pues, como la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es expresable, entonces ΔΛ es expresable; luego ΔM es también expresable y conmensurable en longitud con ΔE [X 20]. Puesto que el doble del rectángulo comprendido por AΓ, ΓB, es decir MZ, es, a su vez, medial y se ha aplicado a la recta expresable MΛ, entonces MH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]; luego ΔM es también inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]; luego ΔM es también inconmensurable en longitud con MH [X 13]. Así pues, ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΔH es una (recta) binomial [X 36].

Hay que demostrar que es también cuarta.

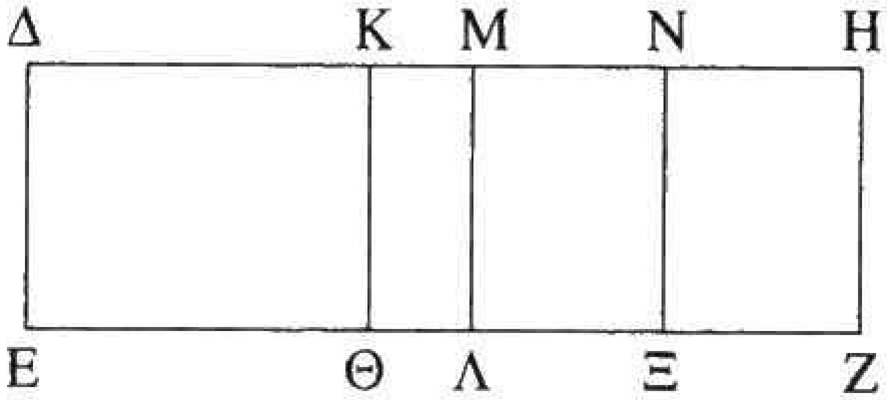
De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que ΔM es mayor que MH, y que el (rectángulo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN. Así pues, como el cuadrado de AΓ es inconmensurable con el (cuadrado) de ΓB, entonces ΔΘ es inconmensurable con KΛ; de modo que ΔK es inconmensurable con KM [VI 1; X 11]. Pero si hay dos rectas desiguales y se aplica a la mayor un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y la divide en partes inconmensurables, entonces el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una recta inconmensurable en longitud con ella (la mayor) [X 18]; luego el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΔM). Ahora bien, ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ΔM es conmensurable con la (recta) expresable propuesta ΔE.

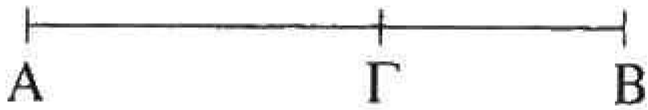
Por consiguiente, ΔH es una cuarta binomial. Q. E. D.

Proposición 64

El cuadrado del lado de un área expresable más una medial aplicado a una recta expresable produce como anchura una quinta binomial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial, dividido en sus rectas por el (punto) Γ, de modo que AΓ sea la mayor, y póngase la recta expresable ΔE, y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΔH.





Digo que ΔH es una quinta binomial.

Sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. Pues bien, como AB, el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial, ha sido dividido por el (punto) Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 40]. Así pues, como la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es medial, entonces el (área) ΔΛ es medial; de modo que ΔM es una (recta) expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo) AΓ, ΓB, es decir MZ, es a su vez expresable, entonces MH es también una (recta) expresable conmensurable con ΔE [X 20]. Luego ΔM es inconmensurable con MH [X 13]; luego ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto ΔH es una binomial [X 36].

Digo ahora que también es quinta.

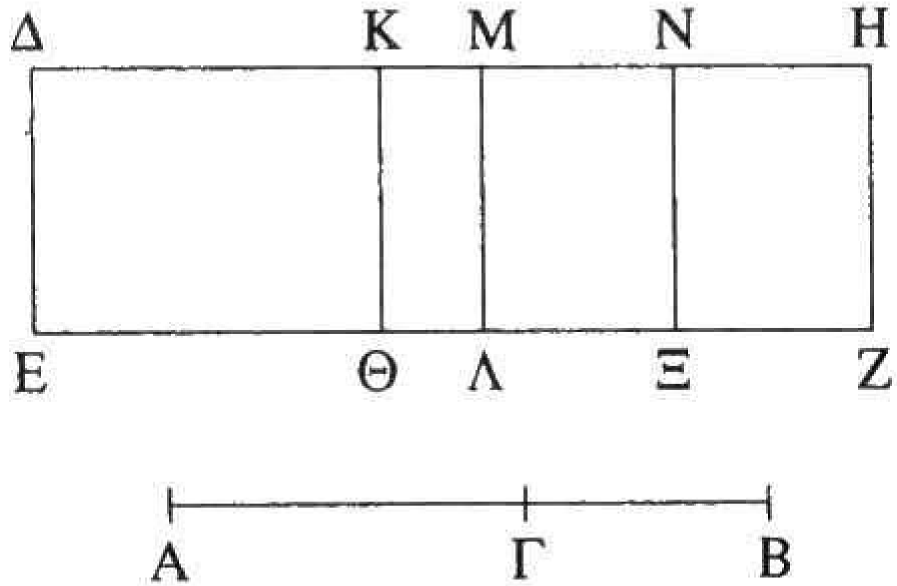
Pues de manera semejante demostraríamos que el (rectángulo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN, y que ΔK es inconmensurable en longitud con KM; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella [X 18]. Y ΔM, MH son conmensurables sólo en cuadrado, y la menor MH es conmensurable en longitud con ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una quinta binomial. Q. E. D.

Proposición 65

El cuadrado del lado de la (suma de) dos (áreas) mediales, aplicado a una recta expresable produce como anchura una sexta binomial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a la (suma de) dos áreas mediales, dividido por el (punto) Γ, y sea ΔE una (recta) expresable, y aplíquese a ΔE el (paralelogramo) ΔZ igual al cuadrado de AB, que produzca la anchura ΔH.



Digo que ΔH es una sexta binomial.

Sígase pues la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. Y como AB, el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales, se ha dividido por el (punto) Γ, entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial, el (rectángulo comprendido) por ellas también medial, y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas [X 41]; de modo que, según las demostraciones anteriores, cada uno de los (rectángulos) ΔΛ, MZ es medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ΔE; así pues, cada una de las (rectas) ΔM, MH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Ahora bien, puesto que la suma de los (cuadrados) de AΓ, ΓB es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, entonces ΔΛ es inconmensurable con MZ. Luego ΔM es inconmensurable con MH [VI 1; X 11]; entonces ΔM, MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ΔH es una (recta) binomial [X 36].

Digo ahora que también es sexta.

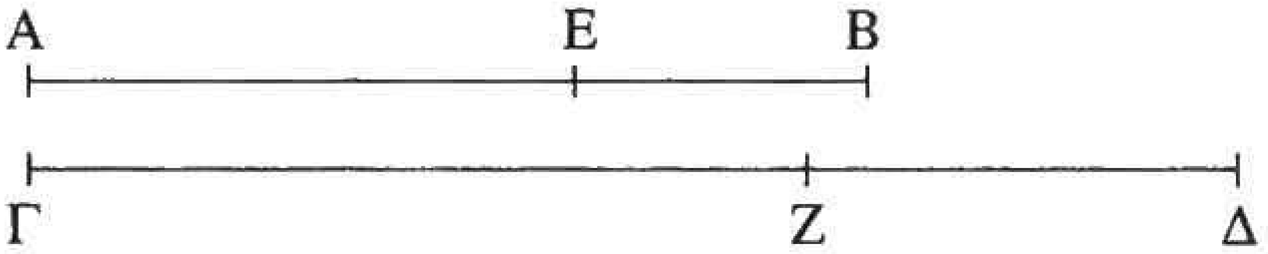
Pues de manera semejante demostraríamos a su vez que el (rectángulo) ΔK, KM es igual al (cuadrado) de MN, y que ΔK es inconmensurable en longitud con KM; y por lo mismo, entonces, el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (ΔM). Ahora bien, ninguna de las (rectas) ΔM, MH es conmensurable en longitud con la recta propuesta ΔE.

Por consiguiente, ΔH es una sexta binomial. Q. E. D

Proposición 66

Una recta conmensurable en longitud con una binomial es también ella misma binomial y del mismo orden.

Sea AB la recta binomial y sea ΓΔ conmensurable en longitud con AB.



Digo que ΓΔ es binomial y del mismo orden que AB.

Pues como AB es binomial, divídase en sus términos por el (punto) E, y sea AE el término mayor; entonces AE, EB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36]. Hágase de forma que como AB es a ΓΔ, así AE a ΓZ [VI 12]; entonces la (recta) restante EB es a la (recta) restante ZΔ, como AB es a ΓΔ [V 19]. Pero AB es conmensurable en longitud con ΓΔ; luego AE es conmensurable también con ΓZ y EB con ZΔ [X 11]. Ahora bien, AE, EB son expresables; luego ΓZ, ZΔ son también expresables. Y como AE es a ΓZ, EB a ZΔ [V 11]. Entonces, por alternancia, como AE es a EB, ΓZ a ZΔ [V 16]. Pero AE, EB son conmensurables sólo en cuadrado; entonces ΓZ, ZΔ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Y son expresables; por tanto ΓΔ es una binomial [X 36].

Digo además que es del mismo orden que AB.

Pues el cuadrado de AE es mayor que el de EB o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (AE) o en el de una inconmensurable con ella. Pues bien, si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), también el cuadrado de ΓZ será mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓZ). Y si AE es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, también ΓZ será conmensurable con ella [X 12], por eso, también, cada una de las (rectas) AB, ΓΔ es primera binomial, es decir, son del mismo orden. Pero si EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, ZΔ es también conmensurable con ella [X 12], por eso (ΓΔ) será del mismo orden que AB: porque cada una de ellas será una segunda binomial [X Seg. Def. 2]. Pero si ninguna de las (rectas) AE, EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ será conmensurable con ella [X 13] y cada una será tercera (binomial) [X Seg. Def. 3]. Pero si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), también el cuadrado de ΓZ es mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓZ) [X 14]. Y si AE es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, ΓZ es también conmensurable con ella; y cada una de ellas es cuarta (binomial) [X Seg. Def. 4]. Pero si (lo es) EB, también (lo es) ZΔ, y cada una de ellas será quinta (binomial) [X Seg. Def. 5]. Y si ninguna de las (rectas) AE, EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, tampoco lo es ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ y cada una de ellas será sexta (binomial) [X Seg. Def. 6].

De modo que una (recta) conmensurable en longitud con una binomial es también ella misma binomial y del mismo orden. Q. E. D.

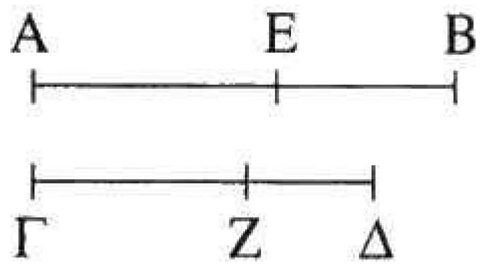
Proposición 67

La recta conmensurable en longitud con una bimedial es también ella misma bimedial y del mismo orden.

Sea AB una bimedial y sea ΓΔ conmensurable en longitud con ella.

Digo que ΓΔ es bimedial y del mismo orden que AB.

Pues como AB es una bimedial, divídase en sus mediales por el (punto) E; entonces AE, EB son rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado [X 37 y 38]. Hágase de forma que como AB es a ΓΔ, AE a ΓZ; entonces la (recta) restante EB es a la (recta) restante ZΔ, como AB es a ΓΔ [V 19]. Pero AB es conmensurable en longitud con ΓΔ; entonces AE, EB son conmensurables respectivamente con ΓZ, ZΔ [X 11]. Pero AE, EB son mediales; luego ΓZ, ZΔ son también mediales [X 23], Y dado que, como AE es a EB, ΓZ a ZΔ [V 11], mientras que AE, EB son conmensurables sólo en cuadrado, [entonces] ΓZ, ZΔ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero se ha demostrado también que son mediales; por tanto ΓΔ es bimedial.



Digo ahora que también es del mismo orden que AB.

Pues dado que, como AE es a EB, ΓZ a ZΔ, entonces, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo) AEB, así el (cuadrado) de ΓZ es al (rectángulo) ΓZΔ; por alternancia, como el (cuadrado) de AE es al (cuadrado) de ΓZ, así el (rectángulo) AEB al (rectángulo) ΓZΔ [V 16]. Y el (cuadrado) de AE es conmensurable con el de ΓZ; luego el (rectángulo) AEB también es conmensurable con el (rectángulo) ΓZΔ. Así pues, si el (rectángulo) AEB es expresable, el (rectángulo) ΓZΔ es también expresable [y por eso ΓΔ es primera bimedial] [X 37]. Pero si es medial, medial [X 23 Por.] y cada una de ellas AB, ΓΔ es segunda [X 38].

Por eso ΓΔ es del mismo orden que AB. Q. E. D.

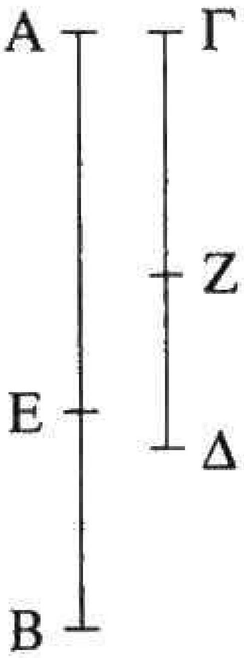
Proposición 68

Una (recta) conmensurable con una (recta) «mayor» es también «mayor»

Sea AB la recta «mayor», y sea ΓΔ conmensurable con AB.

Digo que ΓΔ es «mayor».

Divídase AB por el (punto) E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable, pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial [X 39]; hágase de la misma forma que en los (teoremas) anteriores. Dado que, como AB es a ΓΔ, así AE a ΓZ y EB a ZΔ, entonces, como AE es a ΓZ, así también EB a ZΔ [V 11]. Pero AB es conmensurable con ΓΔ; luego AE, EB son conmensurables respectivamente con ΓZ, ZΔ [V 11]. Ahora bien, dado que, como AE es a ΓZ, así EB a ZΔ, y por alternancia, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ [V 16], entonces, por composición, como AB es a BE, así ΓΔ a ΔZ [V 18]; luego como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de BE, así el (cuadrado) de ΓΔ al (cuadrado) de ΔZ [VI 20]. De manera semejante demostraríamos que como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de AE, así el (cuadrado) de ΓΔ al (cuadrado) de ΓZ. Entonces, como el (cuadrado) de AB es a los (cuadrados) de AE, EB, así el (cuadrado) de ΓΔ a los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ. Luego, por alternancia, como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de ΓΔ, así los (cuadrados) de AE, EB a los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ [V 16]. Pero el (cuadrado) de AB es conmensurable con el cuadrado de ΓΔ; entonces los (cuadrados) de AE, EB son también conmensurables con los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ. Y los cuadrados de AE, EB juntos son expresables, (entonces) los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ juntos son también expresables. Pero, de manera semejante, el doble del (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ. Y el doble del (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial; entonces, el doble del (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es medial [X 23 Por.]. Luego ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable, pero el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial. Por tanto, la recta entera ΓΔ es la (recta) no expresable llamada «mayor» [X 39].

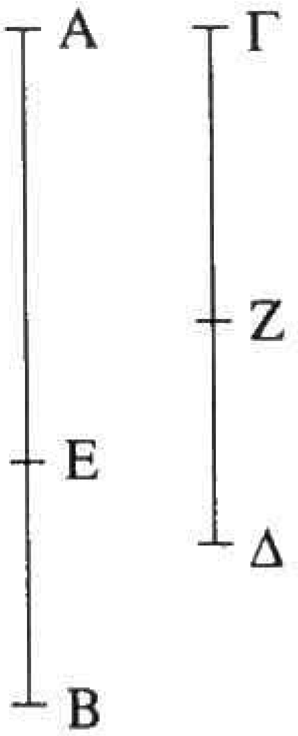


Por consiguiente, una (recta) conmensurable con una «mayor» es «mayor». Q. E. D.

Proposición 69

Una recta conmensurable con el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial es ella misma también el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial y sea ΓΔ conmensurable con AB.



Hay que demostrar que ΓΔ es también el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable.

Divídase AB en sus rectas por el (punto) E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas expresable [X 40]; sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. De manera semejante demostraríamos que ΓZ, ZΔ son inconmensurables en cuadrado y que la suma de los (cuadrados) de AE, EB es conmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; de modo que la suma de los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ es medial y el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ expresable.

Por consiguiente, ΓΔ es el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable. Q. E. D.

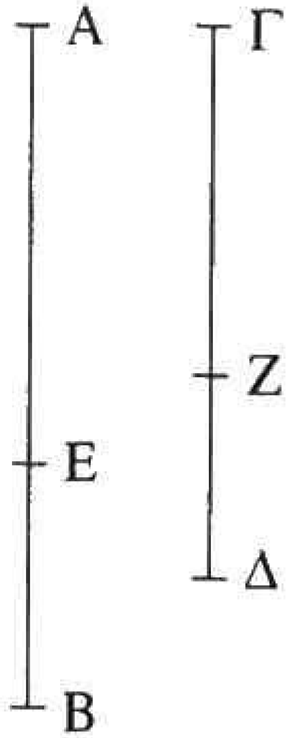
Proposición 70

Una (recta) conmensurable con el lado del cuadrado equivalente a la suma dos (áreas) mediales es también ella misma el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales y sea ΓΔ conmensurable con AB.

Hay que demostrar que ΓΔ es también el lado del cuadrado equivalente a la suma dos (áreas) mediales.

Pues como AB es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales, divídase en sus rectas por E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus (cuadrados) medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de los cuadrados de AE, EB inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AE, EB [X 41]; sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. De manera semejante demostraríamos que ΓZ, ZΔ son inconmensurables en cuadrado y que la suma de los (cuadrados) de AE, EB es conmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; de modo que la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ es medial y el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es también medial y además la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ.



Por consiguiente, ΓΔ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales. Q. E. D.

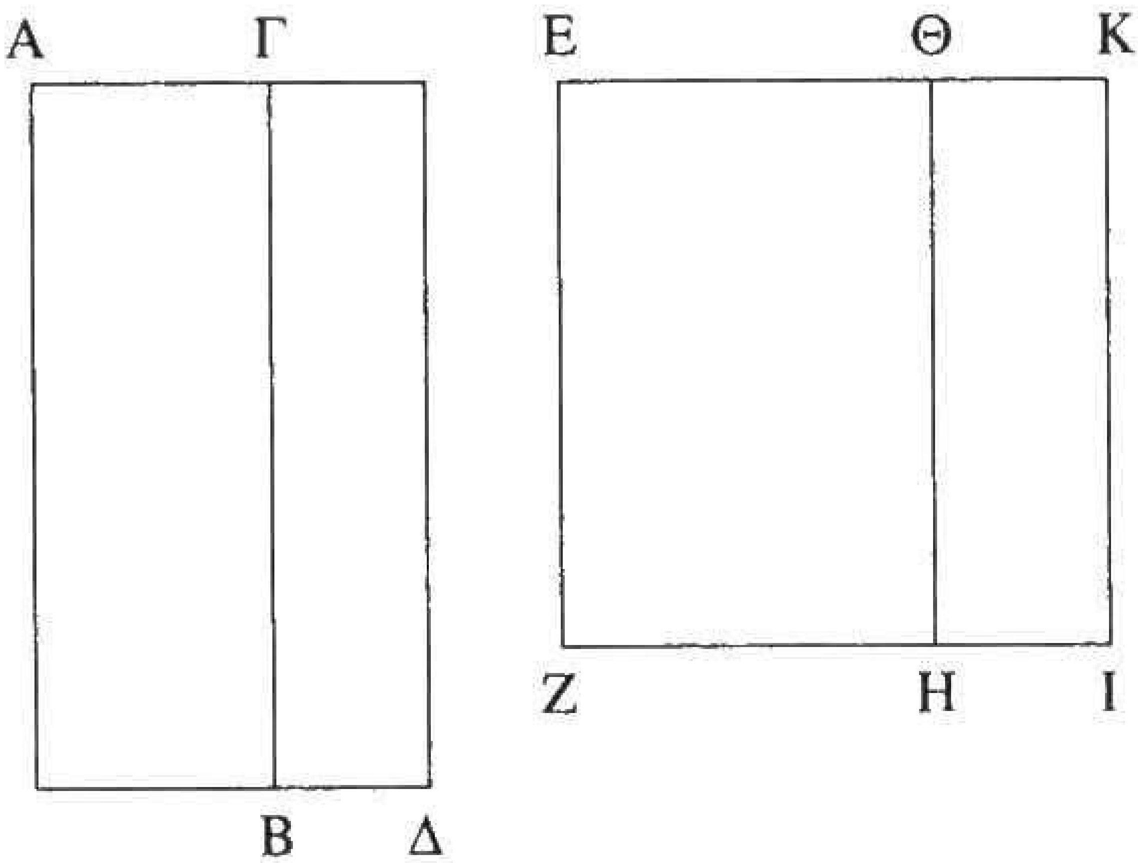
Proposición 71

Si se suman un (área) expresable y una medial resultan cuatro (tipos de rectas) no expresables: o una binomial o una primera bimedial o una «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable.

Sea AB el (área) expresable y ΓΔ la medial.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área ΑΔ es o binomial o primera bimedial o «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.

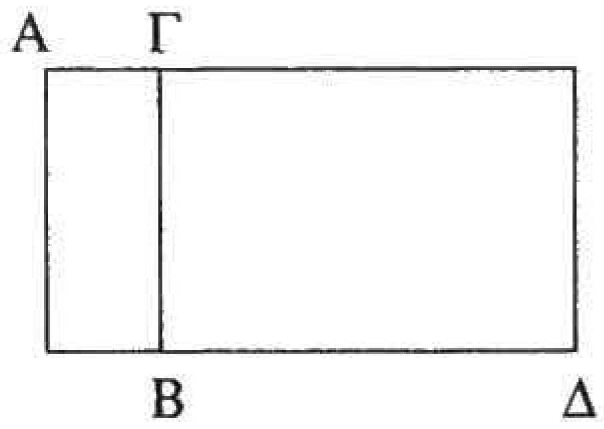
Pues ΑΒ o es mayor que ΓΔ o es menor. Sea en primer lugar mayor; y póngase la (recta) expresable ΕΖ, y aplíquese a ΕΖ el rectángulo ΕΗ igual a ΑΒ que produzca la anchura ΕΘ; y aplíquese a ΕΖ el rectángulo ΘΙ igual a ΔΓ que produzca la anchura ΘΚ. Y puesto que ΑΒ es expresable y es igual a ΕΗ, entonces ΕΗ es también expresable y se ha aplicado a ΕΖ produciendo la anchura ΕΘ; luego ΕΘ es expresable y conmensurable en longitud con ΕΖ [X 20]. Puesto que ΓΔ es, a su vez, medial y es igual a ΘΙ, entonces ΘΙ es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable ΕΖ produciendo la anchura ΘΚ; luego ΘΚ es expresable e inconmensurable en longitud con ΕΖ [X 22]. Y como ΓΔ es medial, mientras que ΑΒ es expresable, entonces ΑΒ es inconmensurable con ΓΔ; de modo que ΕΗ es inconmensurable con ΘΙ. Pero como ΕΗ es a ΘΙ, así ΕΘ a ΘΚ [VI 1]; luego ΕΘ es inconmensurable en longitud con ΘΚ [X 11]. Y ambas son expresables; entonces ΕΘ, ΘΚ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΕΚ es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ [X 36]. Y puesto que ΑΒ es mayor que ΓΔ, mientras que ΑΒ es igual a ΕΗ, y ΓΔ (es igual) a ΘΙ, entonces ΕΗ es también mayor que ΘΙ; luego ΕΘ es también mayor que ΘΚ. Pues bien, el cuadrado de ΕΘ es mayor que el de ΘΚ o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con (ΕΘ) o bien en el de una (recta) inconmensurable con ella.

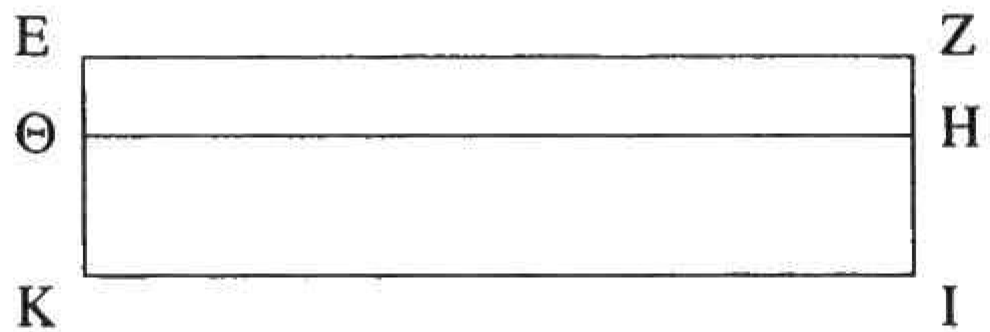


En primer lugar, sea mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΘE); ahora bien, la mayor, ΘE, es conmensurable con la recta propuesta EZ; entonces EK es una (recta) primera binomial [X Seg. Def. 1]. Y EZ es expresable; pero si un área es comprendida por una (recta) expresable y una primera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es una binomial [X 54]. Así pues, el lado del cuadrado equivalente a EI es binomial; de modo que el lado del cuadrado equivalente a AΔ es también binomial.

Pero ahora sea el cuadrado de EΘ mayor que el de ΘK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (EΘ). Ahora bien, la mayor EΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta EZ; entonces EK es una cuarta binomial [X Seg. Def. 4]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una cuarta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada «mayor» [X 57]. Así pues el lado del cuadrado equivalente al área EI es una recta «mayor»; de modo que también el lado del cuadrado equivalente a AΔ es «mayor».

Pero sea ahora AB menor que ΓΔ; entonces EH es menor que ΘI; de modo que EΘ es también menor que ΘK. Pero el cuadrado de ΘK es mayor que el de EΘ o bien en el cuadrado de una (recta) conmensurable con (ΘK) o bien en el de una inconmensurable con ella. En primer lugar sea mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella; ahora bien, la menor, EΘ, es conmensurable en longitud con la recta propuesta EZ; entonces EK es una segunda binomial [X Seg. Def. 2]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una segunda binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es una primera bimedial [X 55]; así pues, el lado del cuadrado equivalente al área EI es una primera bimedial, de modo que el lado del cuadrado equivalente al área AΔ es también una primera bimedial.





Pero ahora sea el cuadrado de ΘK mayor que el de ΘE en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΘK). Ahora bien, la recta menor EΘ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta EZ; entonces EK es una quinta binomial [X Seg. Def. 5]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial [X 58]. Por tanto, el lado del cuadrado equivalente al área EI es el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial; de modo que el lado del cuadrado equivalente a AΔ es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial.

Por consiguiente, si se suman un área expresable y una medial, se producen cuatro (tipos de) rectas no expresables: o una binomial o una primera bimedial o una «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial. Q. E. D.

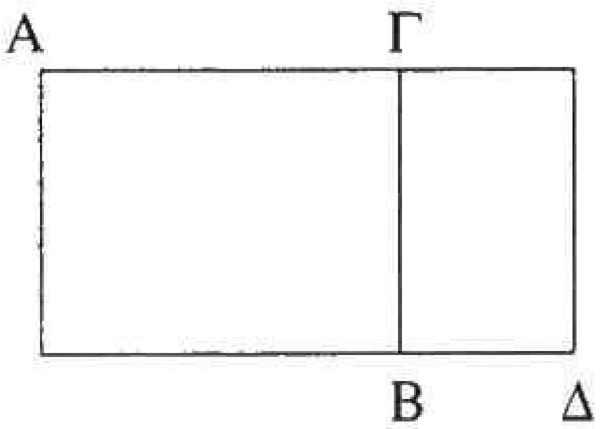
Proposición 72

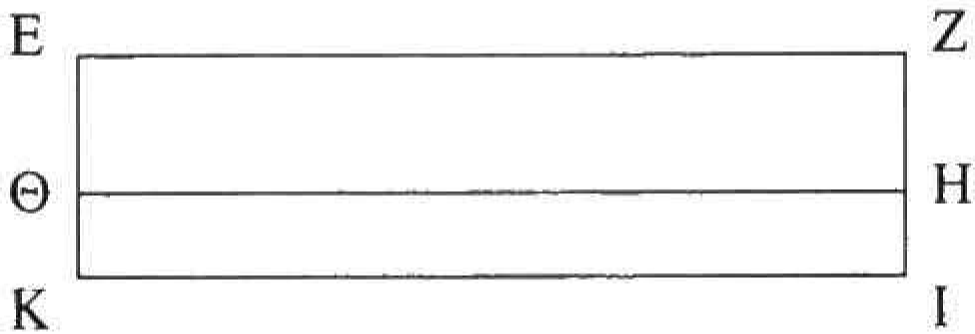
Si se suman dos áreas mediales inconmensurables entre sí, resultan los dos restantes (tipos de) rectas no expresables: o la segunda bimedial o el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Súmense pues las dos (áreas) mediales inconmensurables entre sí AB, ΓΔ.

Digo que el lado del cuadrado igual a ΑΔ o es una segunda bimedial o es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Pues ΑΒ o es mayor o es menor que ΓΔ. Sea ΑΒ, si se da el caso, en primer lugar, mayor que ΓΔ; y póngase la recta expresable ΕΖ, y aplíquese a ΕΖ el rectángulo ΕΗ igual a ΑΒ que produzca la anchura ΕΘ, y el (rectángulo) ΘΙ igual a ΓΔ que produzca la anchura ΘΚ. Y puesto que cada una de las (áreas) ΑΒ, ΓΔ es medial, entonces cada una de las (áreas) ΕΗ, ΘΙ es también medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ΖΕ produciendo las anchuras ΕΘ, ΘΚ; así pues, cada una de las (rectas) ΕΘ, ΘΚ es expresable e inconmensurable en longitud con ΕΖ [X 22]. Y puesto que ΑΒ es inconmensurable con ΓΔ, y ΑΒ es igual a ΕΗ, y ΓΔ a ΘΙ, entonces ΕΗ es también inconmensurable con ΘΙ. Pero como ΕΗ es a ΘΙ, así ΕΘ es a ΘΚ [VI 1]; entonces ΕΘ es inconmensurable en longitud con ΘΚ [X 11]. Así pues ΕΘ, ΘΚ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΕΚ es binomial [X 36]. Pero el cuadrado de ΕΘ es mayor que el de ΘΚ o bien en el cuadrado de una (recta) conmensurable con (ΘΚ) o bien en el de una inconmensurable con ella.





Sea mayor el cuadrado (de ΘΚ), en primer lugar, en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella (ΘΚ). Ahora bien, ninguna de las (rectas) ΕΘ, ΘΚ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΕΖ; entonces ΕΚ es una tercera binomial [X Seg. Def. 3]. Pero ΕΖ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es una segunda bimedial [X 56]; luego el lado de ΕΙ, es decir de ΑΔ es una segunda bimedial.

Pero ahora sea el cuadrado de EΘ mayor que el de ΘK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (EΘ); ahora bien, cada una de las (rectas) EΘ, ΘK es inconmensurable en longitud con EZ; luego EK es una sexta binomial [X Seg. Def. 6]. Pero si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales [X 59]; de modo que el lado del cuadrado equivalente al área AΔ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Por consiguiente, si se suman dos áreas mediales inconmensurables entre sí, resultan los dos restantes (tipos de) rectas no expresables: o la segunda bimedial o el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Las (rectas) binomiales y las no expresables siguientes no son las mismas que una medial y difieren entre sí. Pues el cuadrado de una medial aplicado a una recta expresable produce como anchura una recta expresable e inconmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado [X 22]. Mientras que el (cuadrado) de la binomial aplicado a una recta expresable produce como anchura la primera binomial [X 60]. Y el cuadrado de la primera binomial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la segunda binomial [X 61]. Pero el cuadrado de una segunda bimedial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la tercera binomial [X 62]. Y el cuadrado de una «mayor» aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la cuarta binomial [X 63]. Mientras que el cuadrado del lado equivalente a un área expresable más una medial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la quinta binomial [X 64]. Pero el cuadrado del lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la sexta binomial [X 65]. Dichas anchuras son diferentes de la primera y entre sí; de la primera porque es expresable, y entre sí porque no son del mismo orden. De modo que las propias (rectas) no expresables también son diferentes entre sí.

Proposición 73

Si se quita de una (recta) expresable otra recta expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera, la (recta) restante no es expresable; llámese apótoma.

Quítese, pues, de la (recta) expresable AB, la recta expresable BΓ que es conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Digo que la (recta) restante AΓ es la recta no expresable llamada apótoma.

Pues como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, y como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de AB al (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, entonces, el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 11]. Pero los (cuadrados) de AB, BΓ son conmensurables con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6]. Y puesto que los (cuadrados) de AB, BΓ son iguales al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ junto con el cuadrado de ΓA [II 7], entonces los cuadrados de AB, BΓ son inconmensurables también con el resto, el cuadrado de AΓ [X 13, 16]. Pero los cuadrados de AB, BΓ son expresables; por tanto, AΓ no es expresable; llámesela apótoma. Q. E. D.[38].

Proposición 74

Si de una (recta) medial se quita otra medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la recta (entera) y que comprenda junto con la recta entera un (rectángulo) expresable, la (recta) restante no es expresable; llámesela primera apótoma de una medial.

Quítese, pues, de la (recta) medial AB la (recta) medial BΓ que es conmensurable sólo en cuadrado con AB y produce junto con AB el (rectángulo) expresable (comprendido) por AB, BΓ.

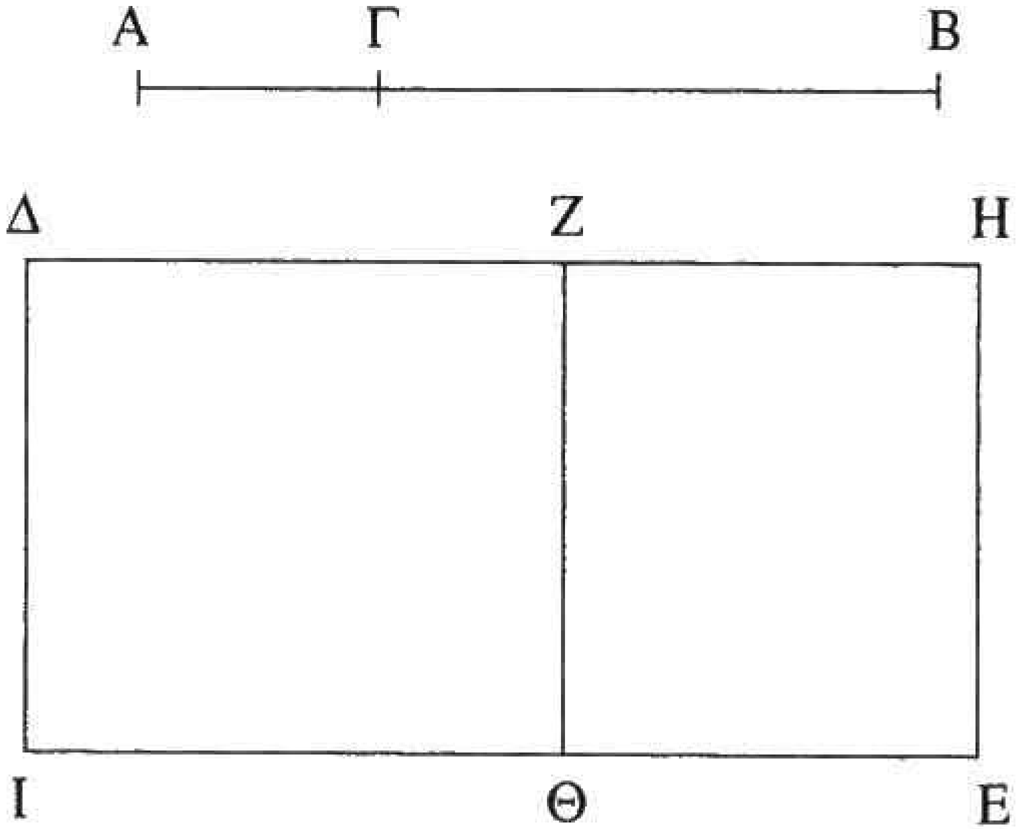
Digo que la (recta) restante ΑΓ no es expresable; llámese primera apótoma de una medial.

Pues como ΑΒ, ΒΓ son mediales, los cuadrados de ΑΒ, ΒΓ son también mediales. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es expresable; entonces los cuadrados de ΑΒ, ΒΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ; luego el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es inconmensurable con el resto, el cuadrado de ΑΓ [II 7]; puesto que, si una magnitud total es inconmensurable con una de las (magnitudes parciales), también las magnitudes iniciales serán inconmensurables [X 16]. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es expresable; luego el cuadrado de ΑΓ no es expresable; por consiguiente ΑΓ no es expresable; llámesela primera apótoma de una medial.

Proposición 75

Si de una (recta) medial se quita otra medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda con la recta entera un rectángulo medial, la recta restante no es expresable; llámesela segunda apótoma de una medial.

Quítese, pues, de la (recta) medial ΑΒ, la (recta) ΓΒ que es conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera ΑΒ y comprende con la (recta) entera ΑΒ el (rectángulo) medial ΑΒ, ΒΓ [X 28].



Digo que la (recta) restante ΑΓ no es expresable; llámesela segunda apótoma de una medial.

Póngase, pues, la recta expresable ΔΙ y aplíquese a ΔΙ un (paralelogramo) ΔΕ igual a los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ que produzca la anchura ΔΗ y aplíquese a ΓΙ el (paralelogramo) ΔΘ igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ que produzca la anchura ΔΖ; entonces el resto ΖΕ es igual al (cuadrado) de ΑΓ [II 7]: ahora bien, puesto que los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ son mediales y conmensurables, entonces ΔΕ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la recta expresable ΔΙ produciendo la anchura ΔΗ. Por tanto ΔΗ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔΙ [X 22]. Puesto que el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es, a su vez, medial, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es también medial [X 23 Por.]. Y es igual a ΔΘ; luego ΔΘ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔΙ produciendo la anchura ΔΖ; así pues, ΔΖ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔΙ [X 22]. Y puesto que ΑΒ es conmensurable sólo en cuadrado con ΒΓ, entonces ΑΒ es inconmensurable en longitud con ΒΓ; luego el cuadrado de ΑΒ es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ [X 11]. Pero los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ son conmensurables con el (cuadrado) de ΑΒ [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ [X 6]; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es inconmensurable con los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ [X 13]. Pero ΔΕ es igual a los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ, mientras que ΔΘ es (igual) al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ; entonces ΔΕ es inconmensurable con ΔΘ. Pero como ΔΕ es a ΔΘ, así HΔ a ΔZ [VI 1]; así pues HΔ es inconmensurable con ΔZ [X 11]. Y ambas son expresables; entonces HΔ, ΔZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ZH es apótoma [X 73]. Pero ΔI es expresable; y el (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una no expresable no es expresable [Deducción a partir de X 20], y el lado del cuadrado equivalente no es expresable. Ahora bien, AΓ es el lado del cuadrado equivalente a ZE; por consiguiente, AΓ no es expresable; llámesela segunda apótoma de una medial. Q. E. D.

Proposición 76

Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y haga con la (recta) entera la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial, la recta restante no es expresable; llámesela «menor».

Quítese de la recta AB la recta BΓ que es inconmensurable en cuadrado con la recta entera y cumple las (condiciones) antedichas [X 33].

Digo que la (recta) restante AΓ es la (recta) no expresable llamada «menor».

Pues como la suma de los cuadrados de AB, BΓ es expresable, y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ medial, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; y por conversión los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el resto, el cuadrado de AΓ [II 7 y X 16]. Pero los (cuadrados) de AB, BΓ son expresables, luego el (cuadrado) de AΓ no es expresable; por consiguiente, AΓ no es expresable; llámesela «menor». Q. E. D.

Proposición 77

Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera, y que haga, con la recta entera, la suma de sus cuadrados medial, pero el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable, la recta restante no es expresable; llámesela la que hace con un área expresable un área entera medial.

Quítese, pues, de la recta AB la recta BΓ que es inconmensurable en cuadrado con AB y cumple las (condiciones) antedichas [X 34].

Digo que la (recta) restante AΓ es la mencionada recta no expresable.

Pues como la suma de los cuadrados de AB, BΓ es medial, y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ expresable, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; luego el resto, el (cuadrado) de AΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [II 7 y X 16]. Ahora bien, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; así pues el cuadrado de AΓ no es expresable; por consiguiente AΓ no es expresable; llámesela la que hace con un área expresable un área entera medial. Q. E. D.

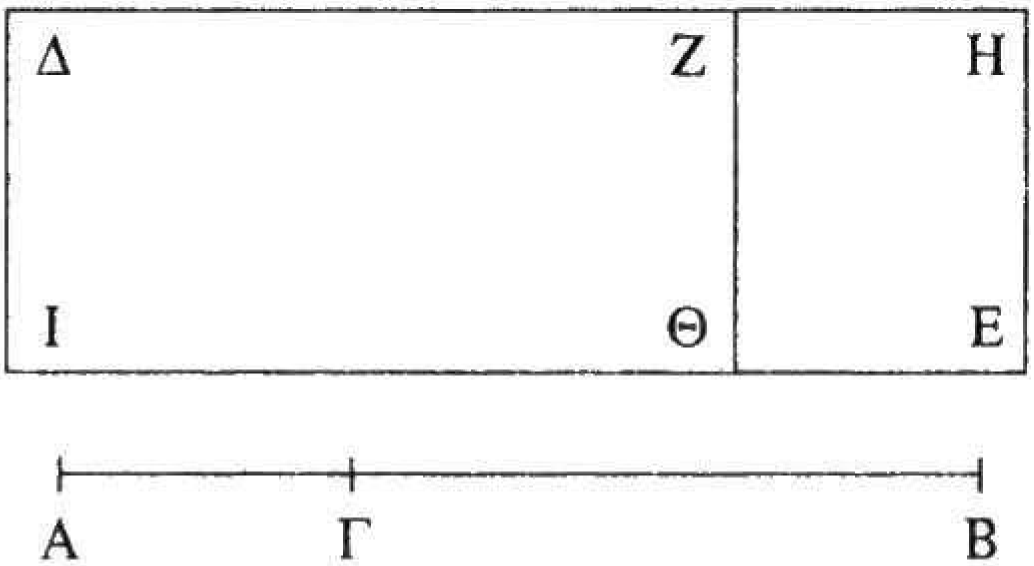
Proposición 78

Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga junto con la (recta) entera la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial y además sus cuadrados inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas, entonces la recta restante no es expresable; llámesela la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Quítese, pues, de la recta AB la (recta) BΓ que sea inconmensurable en cuadrado con AB y que cumpla las condiciones antedichas [X 35].

Digo que la (recta) restante ΑΓ es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Póngase, pues, la (recta) expresable ΔΙ y aplíquese a ΔΙ el (rectángulo) ΔΕ igual a los (cuadrados) de ΑΒ, ΒΓ que produzca la anchura ΔΗ, y quítese ΔΘ igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ. Entonces el (rectángulo) restante ΖΕ es igual al (cuadrado) de ΑΓ [II 7]; de modo que ΑΓ es el lado del cuadrado equivalente a ΖΕ. Ahora bien, puesto que la suma de los cuadrados de ΑΒ, ΒΓ es medial y es igual a ΔΕ, entonces ΔΕ es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔΙ produciendo la anchura ΔΗ; luego ΔΗ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔΙ [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ es, a su vez, medial y es igual a ΔΘ, entonces ΔΘ es medial; y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔΙ produciendo la anchura ΔΖ; luego ΔΖ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔΙ [X 22]. Y como los cuadrados de ΑΒ, ΒΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΒ, ΒΓ, entonces ΔΕ es también inconmensurable con ΔΘ. Pero como ΔΕ es a ΔΘ, así ΔΗ a ΔΖ [VI 1]; luego ΔΗ es inconmensurable con ΔΖ [X 11]. Y ambas son expresables; entonces ΗΔ, ΔΖ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego ΖΗ es apótoma [X 73]. Y ΖΘ es expresable. Pero el rectángulo comprendido por una (recta) expresable y una apótoma no es expresable [Deducción de X 20] y el lado del cuadrado equivalente a él no es expresable; ahora bien, ΑΓ es el lado del cuadrado equivalente a ΖΕ; por consiguiente, ΑΓ no es expresable; llámesela la que hace con un (área) medial un (área) entera medial. Q. E. D.



Proposición 79

A una apótoma únicamente se le adjunta una (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Sea AB la apótoma y BΓ la adjunta a ella; entonces AΓ, ΓB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73].

Digo que no se adjunta a AB ninguna otra (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

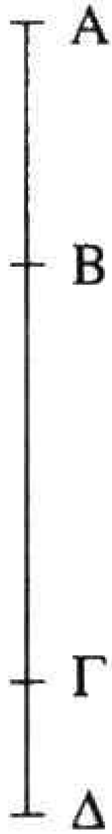
Pues, si es posible, adjúntese BΔ; entonces AΔ, ΔB son también (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB en eso exceden también los (cuadrados) de AΓ, ΓB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, porque ambos exceden en lo mismo al (cuadrado) de AB [II 7]; entonces, por alternancia, aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, en eso excede el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Pero los (cuadrados) de AΔ, ΔB exceden a los (cuadrados) de AΓ, ΓB en un (área) expresable, porque ambos son expresables. Así pues, el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable; lo cual es imposible, porque ambas son áreas mediales [X 21], y un (área) medial no excede a un (área) medial en un (área) expresable [X 26]. Por tanto, no se adjunta a AB otra (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Por consiguiente, a una apótoma únicamente se le adjunta una (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera. Q. E.D.

PROPOSICIÓN 80

A una primera apótoma de una medial se le adjunta únicamente una (recta) medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda junto con la (recta) entera un (rectángulo) expresable.

Sea, pues, AB la primera apótoma de una medial y adjúntese a AB la (recta) BΓ; entonces AΓ, ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el rectángulo expresable AΓ, ΓB [X 74].



Digo que no se añade a AB ninguna otra recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda junto con la (recta) entera un (rectángulo) expresable.

Pues, si es posible, adáptese también ΔB; entonces AΔ, ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el (rectángulo) expresable AΔ, ΔB [X 74]. Y como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB, en eso exceden también los (cuadrados) de AΓ, ΓB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, porque exceden en lo mismo, en el (cuadrado) de AB [II 7]; entonces, por alternancia, aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, en eso excede también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB excede al doble del (rectángulo comprendido por AΓ, ΓB en un área expresable, porque ambos son expresables; así pues, los (cuadrados) de AΔ, ΔB exceden a los (cuadrados) de AΓ, ΓB en un (área) expresable; lo cual es imposible, porque ambos son mediales y un área medial no excede a un (área) medial en un (área) expresable [X 26].

Por consiguiente, a la primera apótoma de una medial se le adjunta únicamente una recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) expresable. Q. E. D.

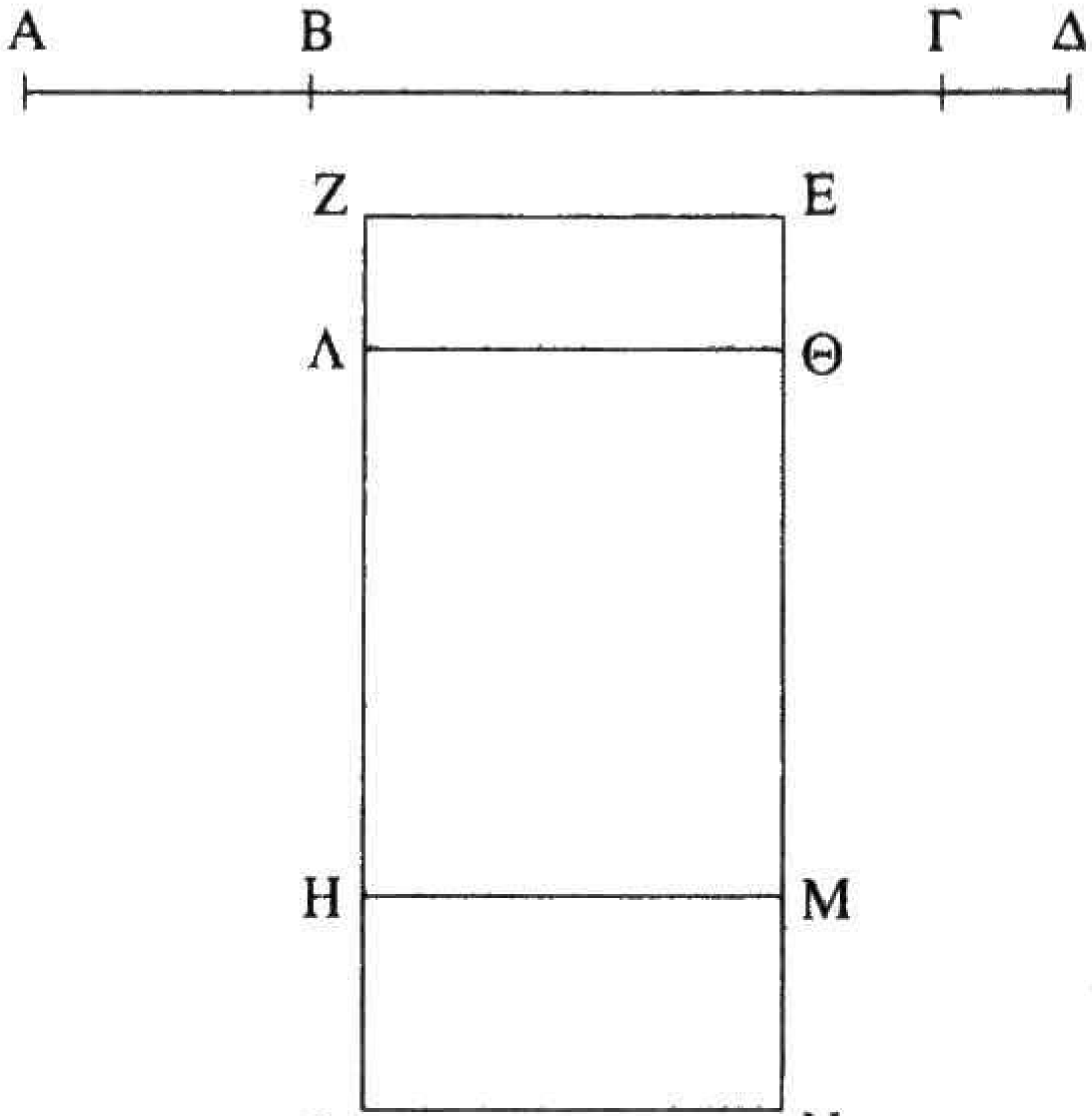
Proposición 81

A la segunda apótoma de una medial de le adjunta únicamente una (recta) medial conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera que comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) medial.

Sea AB la segunda apótoma de una medial y BΓ la adjunta a AB; entonces AΓ, ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el (rectángulo) medial AΓ, ΓB [X 75].

Digo que no se adjuntará a AB ninguna otra (recta) medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) medial.

Pues, si es posible, adjúntese BΔ; entonces AΔ, ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el (rectángulo) medial AΔ, ΔB [X 75]; póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ el (rectángulo) EH igual a los (cuadrados) de AΓ, ΓB que produzca la anchura EM; y quítese el (rectángulo) ΘH igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB que produzca la anchura ΘM; entonces el resto EΛ es igual al cuadrado de AB [II 7]; de modo que AB es el lado del cuadrado equivalente a EΛ. Pues aplíquese, a su vez, a EZ el (área) EI igual a los (cuadrados) de AΔ, ΔB que produzca la anchura EN; pero EΛ es también igual al (cuadrado) de AB; entonces el (área) restante ΘI es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [II 7]. Ahora bien, dado que AΓ, ΓB son mediales, entonces los (cuadrados) de AΓ, ΓB son también mediales: y son iguales a EH; así pues, EH es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura EM; luego EM es una (recta) expresable inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Puesto que el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es, a su vez, medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es también medial [X 23 Por.]. Y es igual a ΘH; entonces ΘH es también medial. Ahora bien, se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura ΘM; luego ΘM es también expresable inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como AΓ, ΓB son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AΓ es inconmensurable en longitud con ΓB. Pero, como AΓ es a ΓB, así el (cuadrado) de ΑΓ al (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ; entonces el (cuadrado) de ΑΓ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ [X 11]. Ahora bien, los (cuadrados) de ΑΓ, ΓΒ son conmensurables con el cuadrado de ΑΓ, mientras que el (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ es conmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ [X 6]; luego los (cuadrados de ΑΓ, ΓΒ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ [X 13]. Y ΕΗ es igual a los cuadrados de ΑΓ, ΓΒ, mientras que ΗΔ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΓ, ΓΒ; así pues, ΕΗ es inconmensurable con ΘΗ. Pero como ΕΗ es a ΘΗ, así ΕΜ a ΘΜ [VI 1]; entonces ΕΜ es inconmensurable en longitud con ΜΘ [X 11]: y ambas son expresables; luego ΕΜ, ΜΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ΕΘ es una apótoma y ΘΜ la adjunta a ella [X 73]. De manera semejante demostraríamos ahora que ΘΝ también es adjunta a ella; entonces, se adjuntan a una apótoma dos rectas distintas que son conmensurables sólo en cuadrado con la (recta) entera; lo cual es imposible [X 79].



Por consiguiente, a la segunda apótoma de una medial se le adjunta únicamente una recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda con la recta entera un rectángulo medial. Q. E. D.

Proposición 82

A una (recta) «menor» se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la recta entera y que haga junto con la recta entera la suma de sus cuadrados expresable y el doble del rectángulo comprendido por ellas medial.

Sea AB la (recta) «menor», y sea BΓ la adjunta a AB; entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable y el rectángulo comprendido por ellas medial [X 76].

Digo que no se adjuntará otra recta a AB que cumpla las mismas condiciones.

Pues, si es posible, adjúntese BΔ; entonces AΔ, ΔB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que cumplen las condiciones antedichas [X 76]. Ahora bien, como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, en eso excede también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB y los (cuadrados) de AΔ, ΔB exceden a los cuadrados de AΓ, ΓB en un (área) expresable, porque ambos son expresables, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable; lo cual es imposible, porque ambos son mediales [X 26].

Por consiguiente, a una recta «menor» se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable con la (recta) entera y que haga con la (recta) entera la suma de sus cuadrados expresable y el doble del rectángulo comprendido por ellas medial. Q. E. D.

Proposición 83

A una recta que hace con un (área) expresable un (área) entera medial se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga, con la (recta) entera, la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable.

Sea AB la recta que hace con un (área) expresable un (área) entera medial y adáptese BΓ a AB; entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que cumplen lo propuesto [X 77].

Digo que no se adaptará a AB otra (recta) que cumpla las mismas condiciones.

Pues, si es posible, adjúntese BΔ; entonces AΔ, ΔB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que cumplen lo propuesto [X 77]. Pues bien, en consonancia con lo anterior, como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AΔ, ΔB a los (cuadrados) de AΓ, ΓB, en eso excede también el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB del doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, y el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB en un (área) expresable, porque ambos son expresables, entonces los (cuadrados) de AΔ, ΔB también exceden a los (cuadrados) de AΓ, ΓB en un (área) expresable; lo cual es imposible; porque ambos son mediales [X 26]. Por tanto, no se adjuntará a AB otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que cumpla con la recta (entera) las condiciones propuestas.

Por consiguiente, se adjuntará únicamente una recta. Q. E. D.

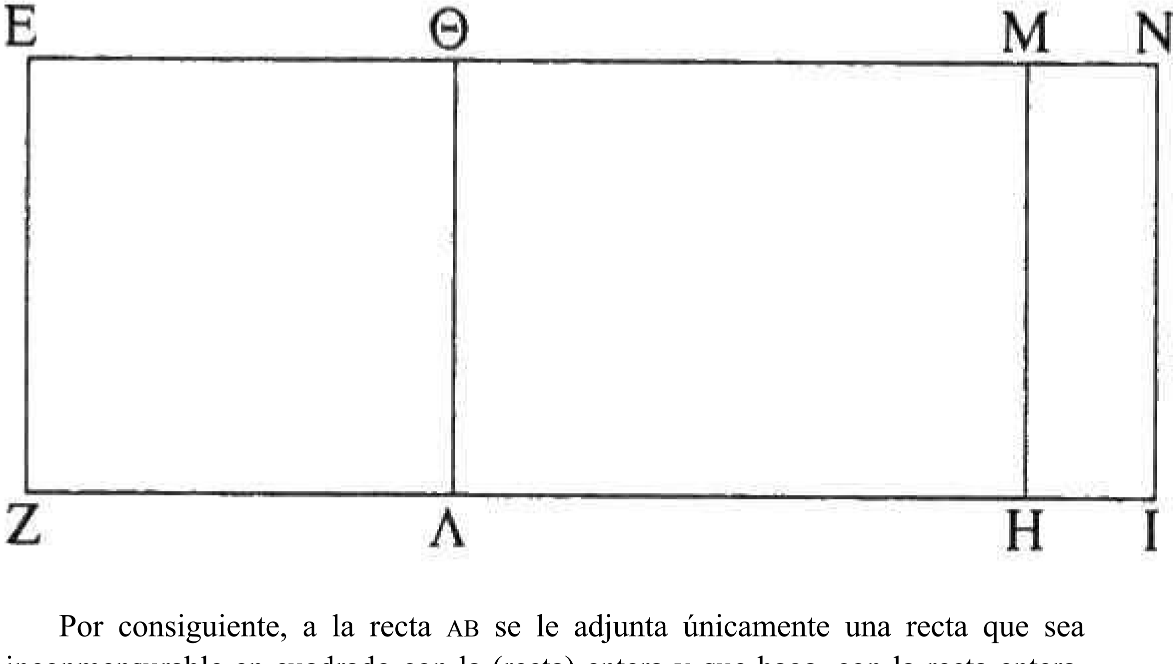
Proposición 84

A la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga, con la (recta) entera, la suma de sus cuadrados medial y el doble del rectángulo comprendido por ellas también medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados.

Sea AB la (recta) que hace junto con un (área) medial un (área) entera medial, y BΓ la adjunta a ella. Entonces AΓ, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que cumplen las condiciones mencionadas [X 78].

Digo que no se adjuntará a AB otra (recta) que cumpla lo antedicho.

Pues, si es posible, adjúntese BΔ, de modo que AΔ, ΔB sean también (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de AΔ, ΔB medial, el doble del (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además los (cuadrados) de AΔ, ΔB inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [X 78]. Póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ el (rectángulo) EH igual a los cuadrados de AΓ, ΓB que produzca la anchura EM, y aplíquese a EZ el (rectángulo) ΘH igual al doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB que produzca la anchura ΘM; entonces el resto, el cuadrado de AB, es igual a EΛ [II 7]; luego AB es el lado del cuadrado equivalente a EΛ. Aplíquese, a su vez, a la recta EZ el (rectángulo) EI igual a los (cuadrados) de AΔ, ΔB que produzca la anchura EN. Pero el (cuadrado) de AB es también igual a EΛ; entonces el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [II 7] es igual a ΘI. Ahora bien, como la suma de los cuadrados de AΓ, ΓB es medial y es igual a EH, entonces EH es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura EM; luego EM es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es, a su vez, medial y es igual a ΘH, entonces ΘH es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura ΘM; luego ΘM es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como los (cuadrados) de AΓ, ΓB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, EH es también inconmensurable con ΘH; entonces EM es inconmensurable en longitud con MΘ [VI 1 y X 11]. Y ambos son expresables; luego EM, MΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, EΘ es apótoma y ΘM la adjunta a ella [X 73]. De manera semejante demostraríamos, a su vez, que EΘ es apótoma y ΘN la adjunta a ella. Entonces se adjuntan a una apótoma dos (rectas) expresables diferentes que son conmensurables sólo en cuadrado con la (recta) entera; lo que se ha demostrado imposible [X 79]. Por tanto, ninguna otra recta se adjuntará a AB.



Por consiguiente, a la recta AB se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga, con la recta entera, la suma de sus cuadrados medial, el doble del (rectángulo comprendido) por ellas, medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas. Q.E. D.

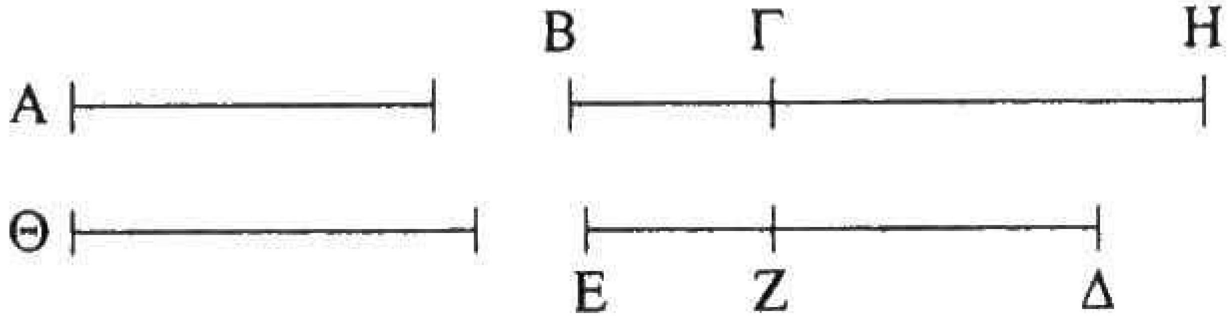
TERCERAS DEFINICIONES

1. Dada una (recta) expresable y una apótoma, si el cuadrado de la (recta) entera es mayor que el de la (recta) adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (la recta entera), y la (recta) entera es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la apótoma) *primera apótoma*.
2. Y si la recta adjunta es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, y el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella, llámese (la apótoma) *segunda apótoma*.
3. Y si ninguna de las dos es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, y el cuadrado de la (recta) entera es mayor que el de la adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella, llámese (la apótoma) *tercera apótoma*.
4. Si, a su vez, el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (la recta entera), entonces, si la (recta) entera es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la apótoma) *cuarta apótoma*.
5. Pero si la adjunta (es conmensurable), *quinta*.
6. Y si ninguna de las dos (es conmensurable), *sexta*.

Proposición 85

Hallar la primera apótoma.

Póngase la (recta) expresable Α, y sea ΒΗ una (recta) conmensurable en longitud con ella; entonces ΒΗ es también expresable. Pónganse dos números cuadrados ΔΕ, ΕΖ, cuya diferencia, ΖΔ, no sea un número cuadrado; entonces ΕΔ tampoco guarda con ΔΖ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Y hágase (de forma que) como ΕΔ es a ΔΖ, así el cuadrado de ΒΗ al cuadrado de ΗΓ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de ΒΗ es conmensurable con el de ΗΓ [X 6]. Pero el (cuadrado) de ΒΗ es expresable; así pues, el cuadrado de ΗΓ también es expresable; luego ΗΓ es expresable. Y como ΕΔ no guarda con ΔΖ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de ΒΗ tampoco guarda con el (cuadrado) de ΗΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.



Luego BH es inconmensurable en longitud con HΓ. Y ambas son expresables; entonces BH, HΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto BΓ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que es también primera.

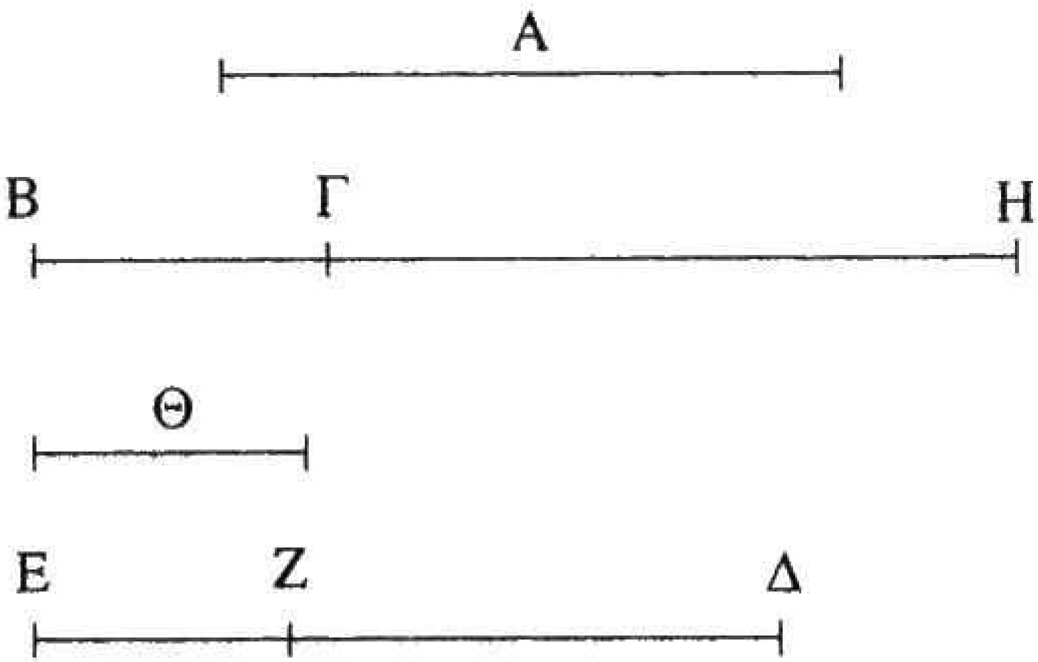
Pues sea el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el (cuadrado) de HΓ. Y dado que, como EΔ es a ZΔ, así el (cuadrado) de BH al (cuadrado) de HΓ, entonces, por conversión [V 11 Por.], como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de HB al (cuadrado) de Θ. Pero ΔE guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pues cada uno de ellos es cuadrado; entonces el (cuadrado) de HB guarda con el de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]. Ahora bien, el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el cuadrado de Θ; entonces el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (BH). Y la (recta) entera BH es conmensurable en longitud con la recta propuesta A. Luego BΓ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1].

Por consiguiente, se ha hallado la primera apótoma BΓ. Que es lo que había que hallar.

Proposición 86

Hallar la segunda apótoma.

Póngase la (recta) expresable A y la (recta) HΓ conmensurable en longitud con A. Entonces HΓ es expresable. Y pónganse dos números cuadrados ΔE, EZ cuya diferencia, ΔZ, no sea un (número) cuadrado. Y hágase de modo que, como ZΔ es a ΔE, así el cuadrado de ΓH al cuadrado de HB [X 6 Por.]. Entonces el cuadrado de ΓH es conmensurable con el cuadrado de HB [X 6]. Pero el cuadrado de ΓH es expresable. Luego el cuadrado de HB es también expresable; por tanto BH es expresable. Y como el (cuadrado) de HΓ no guarda con el (cuadrado) de HB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ΓH es inconmensurable en longitud con HB [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ΓH, HB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego BΓ es apótoma [X 73].



Digo ahora que también es segunda.

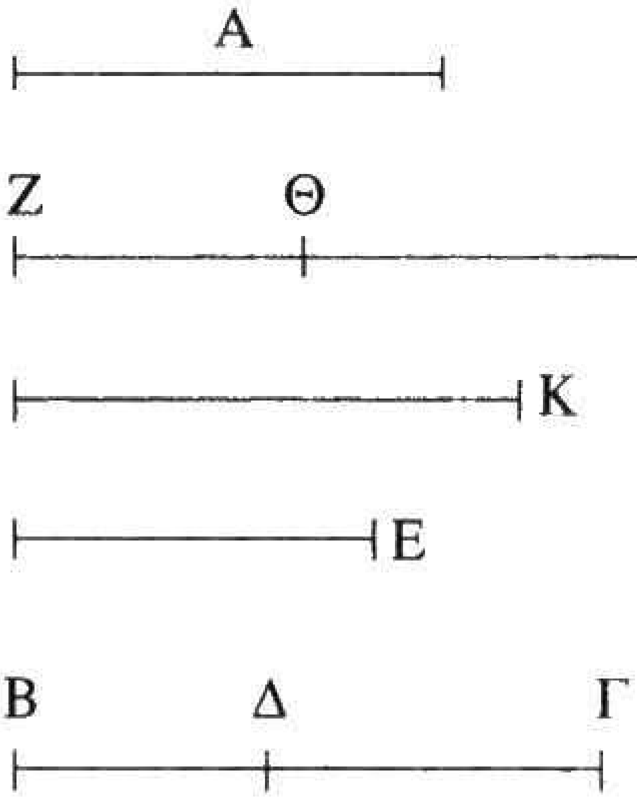
Pues sea el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de HΓ. Así pues, dado que, como el (cuadrado) de BH es al (cuadrado) de HΓ, así el número EΔ es al número ΔZ, entonces, por conversión, como el (cuadrado) de BH es al (cuadrado) de Θ, así ΔE a EZ [V 19 Por.]. Y cada uno de los (números) ΔE, EZ es cuadrado; entonces el cuadrado de BH guarda con el de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]. Y el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de Θ; así pues, el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (BH). Y la (recta) adjunta ΓH es conmensurable con la (recta) expresable propuesta A, Por tanto, BΓ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2].

Por consiguiente, se ha hallado la segunda apótoma BΓ. Q. E. D.

Proposición 87

Hallar la tercera apótoma.

Póngase la (recta) expresable A, y pónganse tres números E, BΓ, ΓΔ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero guarde ΓB con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y hágase de forma que, como E es a BΓ, así el cuadrado de A al cuadrado de ZH, y como BΓ es a ΓΔ, así el cuadrado de ZH al (cuadrado) de HΘ [X 6 Por.]. Así pues, dado que, como E es a BΓ, así el cuadrado de A al cuadrado de ZH, entonces el cuadrado de A es conmensurable con el cuadrado de ZH [X 6]. Y el cuadrado de A es expresable. Luego el cuadrado de ZH es también expresable; por tanto, ZH es expresable. Y como E no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. A su vez, dado que, como BΓ es a ΓΔ, así el cuadrado de ZH al de HΘ, entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de HΘ [X 6]. Pero el (cuadrado) de HΘ es expresable; luego el cuadrado de HΘ es también expresable; por tanto, HΘ es expresable. Ahora bien, puesto que BΓ no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]: y ambas son expresables; así pues ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, ZΘ es una apótoma [X 73].



Digo ahora que también es tercera.

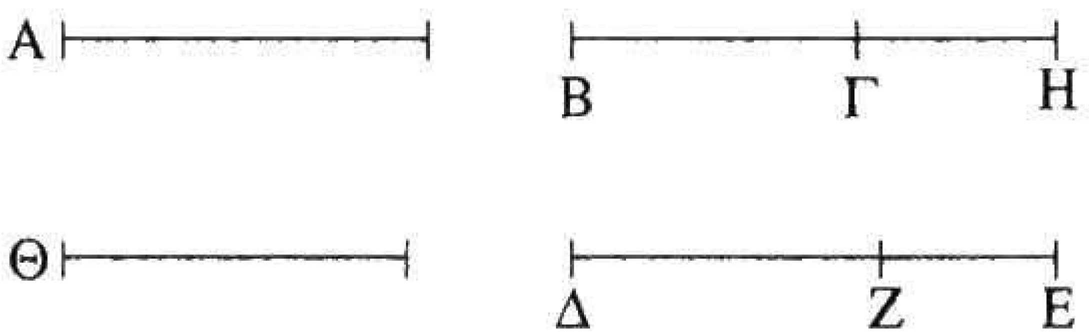
Pues dado que, como E es a BΓ, así el cuadrado de A al de ZH, mientras que como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al de ΘH, entonces, por igualdad, como E es a ΓΔ, así el cuadrado de A al de ΘH [V 22]. Pero E no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de A tampoco guarda con el de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego A es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Por tanto, ninguna de las (rectas) ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Pues bien, sea el (cuadrado) de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de HΘ. Así pues, dado que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por conversión, como BΓ es a BΔ, así el cuadrado de ZH al de K [V 19 Por.]. Pero BΓ guarda con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ZH guarda con el de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es conmensurable en longitud con K [X 9], y el cuadrado de ZH es mayor que el de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Y además ninguna de las (rectas) ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta A; por tanto, ZΘ es una tercera apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la tercera apótoma ZΘ. Q. E. D.

Proposición 88

Hallar la cuarta apótoma.

Póngase la recta expresable A y la (recta) BH conmensurable en longitud con A; entonces BH es expresable. Y pónganse los dos números ΔZ, ZE, de modo que el total ΔE no guarde con cada uno de los números ΔZ, EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Y hágase de modo que, como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de BH al (cuadrado) de HΓ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de BH es conmensurable con el de HΓ [X 6]; pero el (cuadrado) de BH es expresable, luego el (cuadrado) de HΓ es también expresable; por tanto, HΓ es expresable. Ahora bien, como ΔE no guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH no guarda con el de HΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con HΓ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces BH, HΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto BΓ es apótoma [X 73].



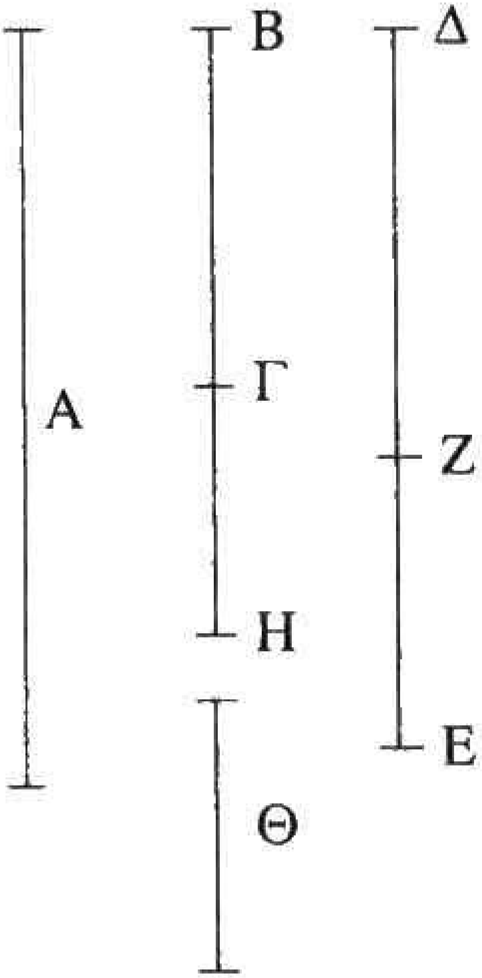
Sea ahora el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de HΓ. Pues bien, dado que, como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de BH al de HΓ, entonces, por conversión, como EΔ es a ΔZ, así el (cuadrado) de HB al de Θ [V 19 Por.]. Pero EΔ no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de HB tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; por tanto BH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Ahora bien, el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de Θ, entonces el (cuadrado) de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BH). Y la (recta) entera BH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto, BΓ es una cuarta apótoma.

Por consiguiente se ha hallado la cuarta apótoma. Q. E. D.

Proposición 89

Hallar la quinta apótoma.

Póngase la (recta) expresable A, y sea la (recta) ΓH conmensurable en longitud con A; entonces ΓH es expresable. Pónganse, a su vez, dos números ΔZ, ZE de modo que ΔE no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y hágase de forma que como ZE es a EΔ, así el (cuadrado) de ΓH al de HB. Entonces el (cuadrado) de HB es también expresable [X 6]; luego BH es también expresable; dado que, como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de BH al de HΓ, mientras que ΔE no guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el de HΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con HΓ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces BH, HΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto BΓ es una apótoma [X 73].



Digo ahora que es también quinta.

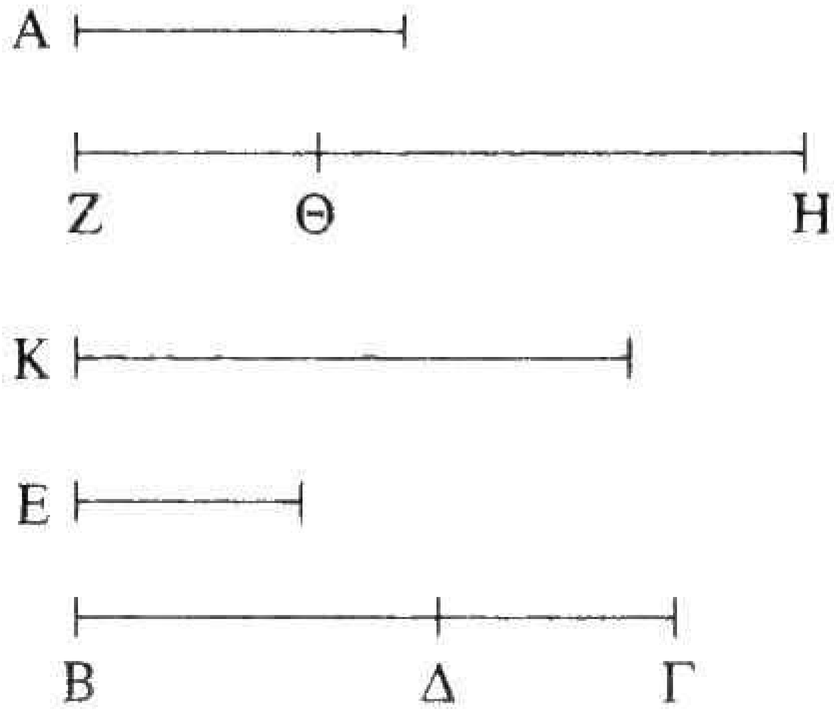
Sea, pues, el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de HΓ. Así pues, dado que, como el (cuadrado) de BH es al de HΓ, así ΔE a EZ, entonces, por conversión, como EΔ es a ΔZ, así el (cuadrado) de BH al de Θ [V 19 Por.]. Pero EΔ no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Y el cuadrado de BH es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de Θ; entonces el cuadrado de HB es mayor que el de HΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (HB). Y la (recta) adjunta ΓH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto BΓ es una quinta apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la quinta apótoma BΓ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 90

Hallar la sexta apótoma.

Póngase la recta expresable A y tres números E, BΓ, ΓΔ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y además no guarde ΓB con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y hágase de forma que como E es a BΓ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH y como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HO [X 6 Por.].



Pues dado que, como E es a BΓ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH, entonces el (cuadrado) de A es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Pero el (cuadrado) de A es expresable; luego el (cuadrado) de ZH es también expresable; por tanto ZH es también expresable; y como E no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de A no guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Puesto que, como BΓ es a ΓΔ, así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de HΘ [X 6]. Pero el (cuadrado) de ZH es expresable; luego el (cuadrado) de HΘ es también expresable; por tanto, HΘ es expresable. Ahora bien, como BΓ no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ZΘ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que además es sexta.

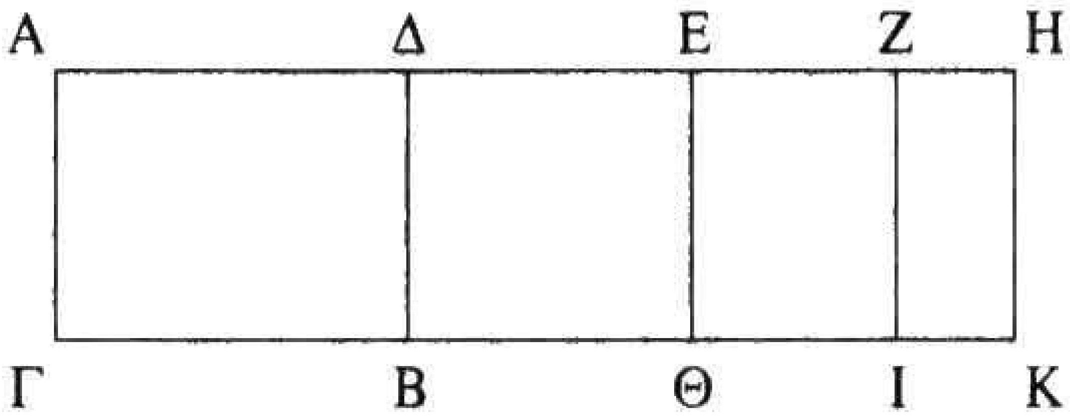
Pues dado que, como E es a BΓ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH, mientras que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de HΘ, entonces, por igualdad, como E es a ΓΔ, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de HΘ [V 22]. Pero E no guarda con ΓΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de HΘ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con HΘ [X 9]; por tanto, ninguna de las rectas ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable A. Así pues, sea el cuadrado de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de HΘ. Dado que, como BΓ es a ΓΔ, así el (cuadrado) de ZH al de HΘ, entonces, por conversión, como ΓB es a BΔ, así el cuadrado de ZH al (cuadrado) de K [X 19 Por.]. Pero ΓB no guarda con BΔ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH no guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]. Y el cuadrado de ZH es mayor que el (cuadrado) de HΘ en el (cuadrado) de K; entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el cuadrado de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y ninguna de las (rectas) ZH, HΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto, Θ es una sexta apótoma.

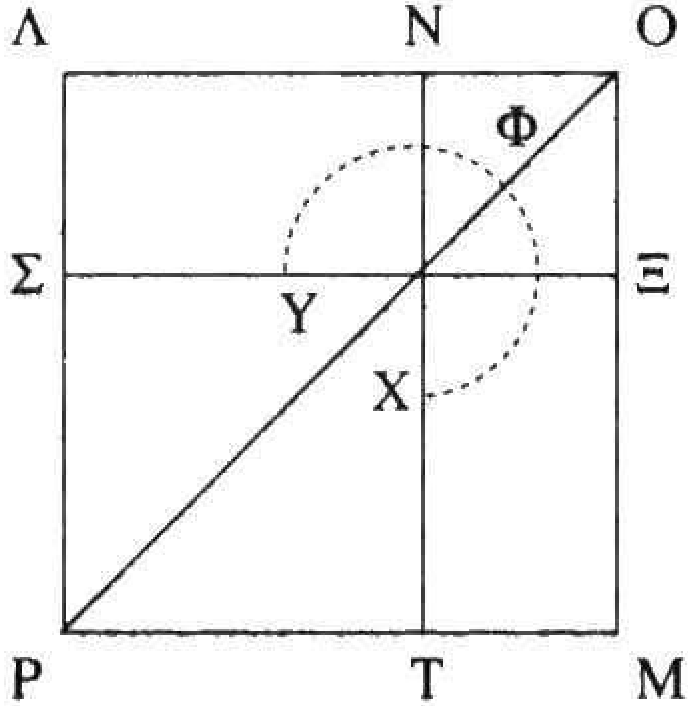
Por consiguiente, se ha hallado la sexta apótoma. Q. E. D.

Proposición 91

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una apótoma.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la primera apótoma AΔ.





Digo que el lado del cuadrado equivalente al área ΑΒ es una apótoma.

Pues como ΑΔ es una primera apótoma, sea ΔΗ la adjunta a ella; entonces ΑΗ, ΗΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y la (recta) entera ΑΗ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, ΑΓ, y el cuadrado de ΑΗ es mayor que el de ΗΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΑΗ) [X Ter. Def. 1]; entonces, si se aplica a ΑΗ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔΗ, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Divídase ΔΗ en dos partes iguales por el (punto) Ε, y aplíquese a ΑΗ un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de ΕΗ, deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por ΑΖ, ΖΗ; entonces ΑΖ es conmensurable con ΖΗ. Y trácense por los puntos Ε, Ζ, Η las (rectas) ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ paralelas a ΑΓ. Y puesto que ΑΖ es conmensurable en longitud con ΖΗ, entonces ΑΗ también es conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) ΑΖ, ΖΗ [X 15]. Pero ΑΗ es conmensurable con AΓ; luego cada una de las (rectas) AZ, ZH es conmensurable en longitud con AΓ [X 12]. Y AΓ es expresable: por tanto, cada una de las (rectas) AZ, ZH es también expresable; de modo que cada uno de los (rectángulos) AI, ZK es también expresable [X 19]. Ahora bien, puesto que ΔE es también conmensurable en longitud con EH, entonces ΔH es también conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) ΔE, EH [X 15]. Pero ΔH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ; así pues cada una de las (rectas) ΔE, EH es también expresable e inconmensurable en longitud con AΓ [X 13]; luego cada uno de los (rectángulos) ΔΘ, EK es medial [X 21].

Ahora, hágase el cuadrado ΛM igual a AI, y quítese un cuadrado NΞ que tenga el ángulo común ΛOM y sea igual a ZK; entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea OP su diagonal y constrúyase la figura. Pues bien, como el rectángulo comprendido por AZ, ZH es igual al cuadrado de EH, entonces, como AZ es a EH, así EH a ZH [VI 17]. Pero como AZ es a EH, así AI a EK, mientras que, como EH es a ZH, así el (área) EK al (área) KZ [VI 1]; luego EK es media proporcional de AI, KZ [V 11]: pero MN es también media proporcional de ΛM, NΞ, como se ha probado anteriormente [Lema post. X 53]; y AI es igual al cuadrado de ΛM, y KZ al de NΞ entonces MN es igual a EK. Pero EK es igual a ΔΘ, y MN a ΛΞ luego ΔK es igual al gnomon [II Def. 2] YΦX y NΞ: pero AK es también igual a los cuadrados de ΛM, NΞ; así pues, el área restante AB es igual a ΣT. Pero ΞT es el cuadrado de ΛN; luego el (cuadrado) de ΛN es igual a AB; por tanto ΛN es el lado del cuadrado equivalente a AB.

Digo ahora que ΛN es una apótoma.

Pues como cada una de las (áreas) AI, ZK es expresable, y es igual a ΛM, NΞ, entonces cada una de las (áreas) ΛM, NΞ, es decir los cuadrados de cada una de las (rectas) ΛO, ON, es también expresable; luego cada una de las (rectas) ΛO, ON es también expresable. Puesto que ΔΘ es, a su vez, medial y es igual a ΛΞ, entonces ΛΞ es también medial. Pues bien, como ΛΞ es medial y NΞ expresable, entonces ΛΞ es inconmensurable con NΞ; pero como ΛΞ es a NΞ, así ΛO a ON [VI 1]; así pues ΛO es inconmensurable en longitud con ON [X 11]. Ahora bien, ambas son expresables; entonces ΛO, ON son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΛN es una apótoma [X 73]: y es el lado del cuadrado equivalente al área AB; por tanto el lado del cuadrado equivalente al área AB es una apótoma.

Por consiguiente, si un área está comprendida por una (recta) expresable..., etc.

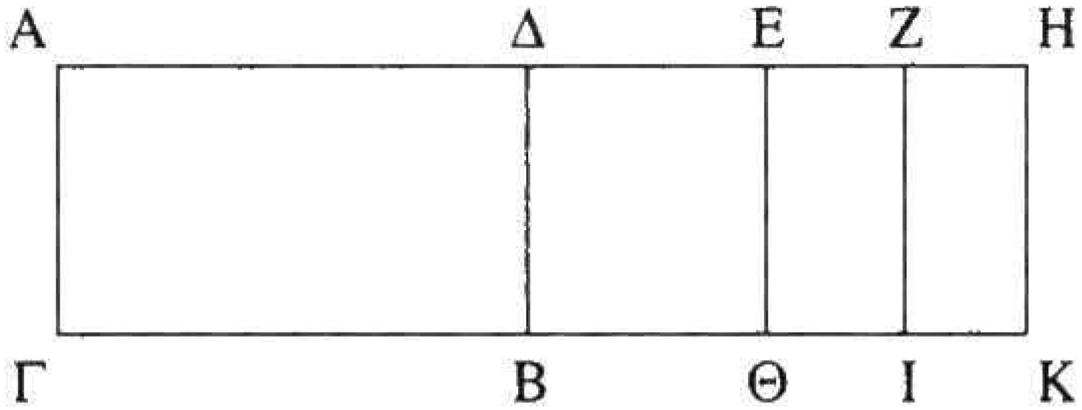
Proposición 92

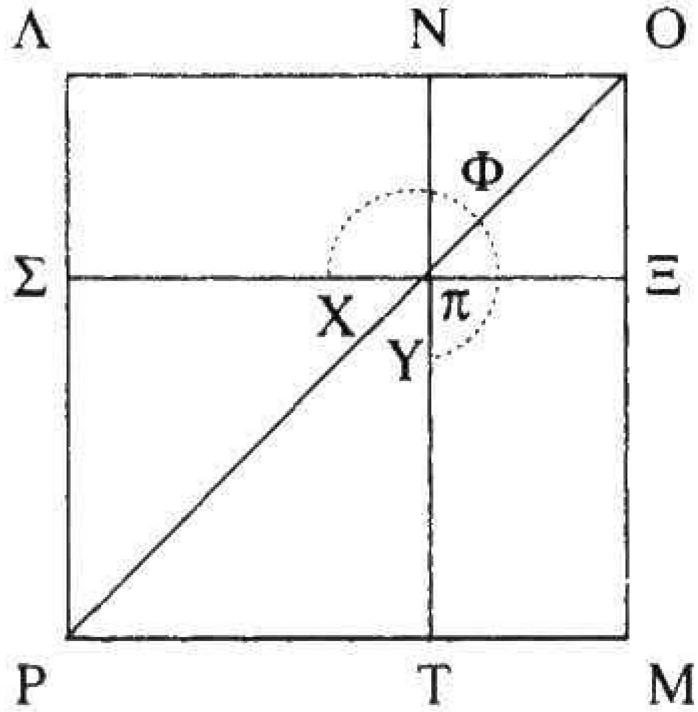
Si un área está comprendida por una recta expresable y una segunda apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una primera apótoma de una medial.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la segunda apótoma AΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una primera apótoma de una medial.

Sea, pues ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73], y la adjunta, ΔH, es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, AΓ, y el cuadrado de la (recta) entera, AH, es mayor que el de la adjunta HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 2]. Pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de HΔ, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en partes conmensurables [X 17]. Pues bien, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E; y aplíquese a AH un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es conmensurable en longitud con ZH. Luego AH también es conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) AZ, ZH [X 15]. Pero AH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ; entonces cada una de las (rectas) AZ, ZH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ [X 13]; luego cada una de las (áreas) AI, ZK es medial [X 21]. Y como ΔE es, a su vez, conmensurable con EH, entonces ΔH es también conmensurable con cada una de las (rectas) ΔE, EH [X 15]. Pero ΔH es conmensurable en longitud con AΓ. Luego cada uno de los (rectángulos) ΔΘ, EK es expresable [X 19].





Pues bien, constrúyase un cuadrado ΛΜ igual a ΑΙ, y quítese ΝΞ igual a ΖΚ que esté en torno al mismo ángulo que ΛΜ, a saber ΛΟΜ; entonces los cuadrados ΛΜ, ΝΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal ΟΡ y constrúyase la figura. Pues bien, como ΑΙ, ΖΚ son mediales y son iguales a los (cuadrados) de ΛΟ, ΟΝ, los cuadrados de ΛΟ, ΟΝ son también mediales; luego ΛΟ, ΟΝ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado[39]. Y como el (rectángulo comprendido) por ΑΖ, ΖΗ es igual al (cuadrado) de ΕΗ, entonces, como ΑΖ es a ΕΗ, así ΕΗ a ΖΗ [VI 17]; pero, como ΑΖ es a ΕΗ, así ΑΙ a ΕΚ; mientras que, como ΕΗ es a ΖΗ, así ΕΚ a ΖΚ [VI 1]; luego ΕΚ es media proporcional de ΑΙ, ΖΚ [V 11], Pero ΜΝ es también media proporcional de los cuadrados ΛΜ, ΝΞ; y ΑΙ es igual a ΛΜ y ΖΚ a ΝΞ; así pues, ΜΝ es igual a ΕΚ. Pero ΔΘ es igual a ΕΚ, mientras que ΛΞ es igual a ΜΝ; por tanto el (área) entera ΔΚ es igual al gmomon ΥΦΧ y ΝΞ. Pues bien, como el (área) entera ΑΚ es igual a ΛΜ, ΝΞ, donde ΔΚ es igual al gnomon ΥΦΧ y ΝΞ, entonces el (área) restante ΑΒ es igual a ΤΣ, pero ΤΣ es el (cuadrado) de ΛN; luego el (cuadrado) de ΛN es igual al (área) AB; por tanto ΛN es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Digo que ΛN es una primera apótoma de una medial.

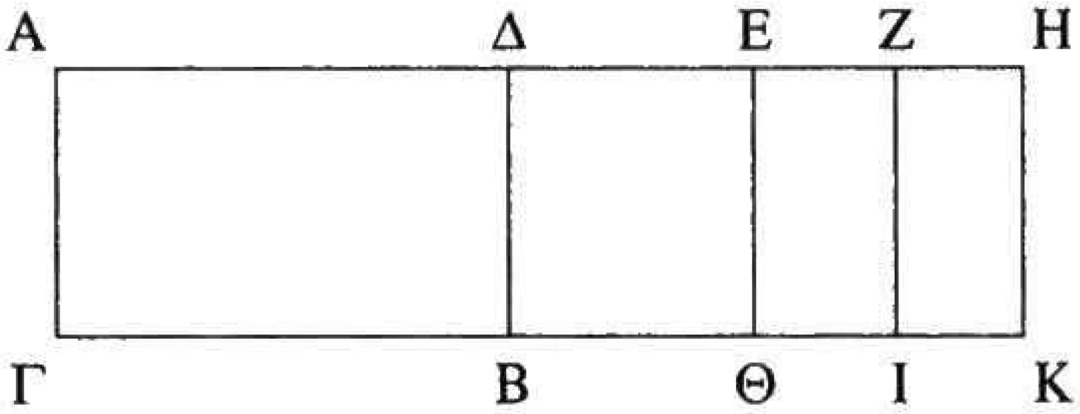
Pues como EK es expresable y es igual a ΛΞ, entonces ΛΞ, es decir el (rectángulo comprendido) por ΛO, ON es expresable. Pero se ha demostrado que NΞ es medial; entonces ΛΞ es inconmensurable con NΞ; pero como ΛΞ es a NΞ, así ΛO a ON [VI 1]; luego ΛO, ON son inconmensurables en longitud [X 11]; así pues, ΛO, ON son mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un rectángulo expresable; por tanto, ΛN es una primera apótoma de una medial; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

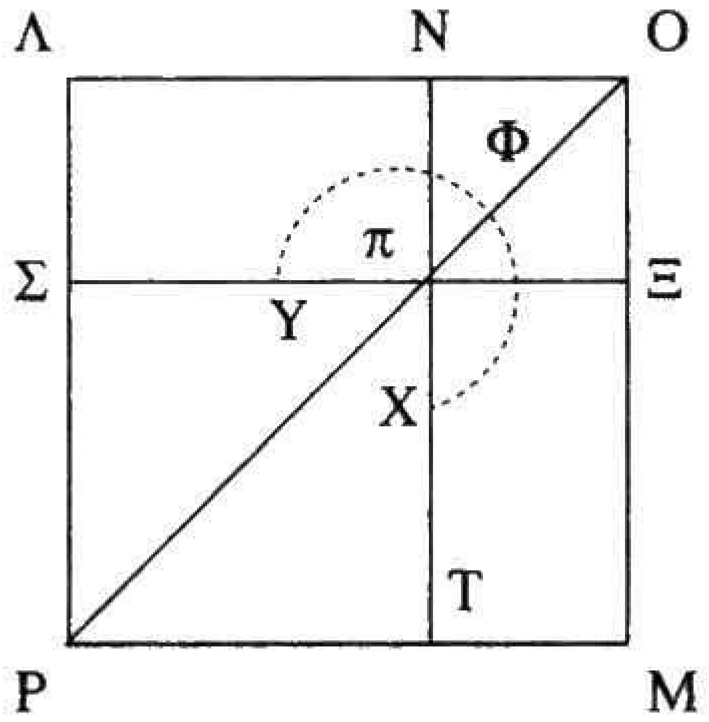
Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es una primera apótoma de una medial. Q. E. D.

Proposición 93

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una segunda apótoma de una medial.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la tercera apótoma AΔ.





Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una segunda apótoma de una medial.

Sea, pues, ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de las (rectas) AH, HΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AΓ, y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AH) [X Ter. Def. 3], Pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en partes conmensurables [X 17]. Así pues, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E, y apliqúese a AH un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH. Y trácense por los (puntos) E, Z, H las (rectas) EΘ, ZI, HK paralelas a AΓ; entonces AZ, ZH son conmensurables; luego AI es también conmensurable con ZK [VI 1 y X 11]. Y como AZ, ZH son conmensurables en longitud, entonces AH es también conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) AZ, ZH [X 15]. Pero AH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ; de modo que AZ, ZH también lo son [X 13]. Luego cada uno de los (rectángulos) AI, ZK es medial [X 21]. Como ΔE es, a su vez, conmensurable en longitud con EH, entonces ΔH es también conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) ΔE, EH [X 15]. Pero HΔ es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ [X 13]. Por tanto, cada una de las (rectas) ΔE, EH es expresable e inconmensurable en longitud con AΓ. Luego cada uno de los (rectángulos) ΔΘ, EK es medial [X 21]. Y como AH, HΔ son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con HΔ. Pero AH es conmensurable en longitud con AZ, y ΔH con EH; luego AZ es inconmensurable en longitud con EH [X 13]. Pero como AZ es a EH, así AI a EK [VI 1]; por tanto, AI es inconmensurable con EK [X 11].

Pues bien, constrúyase el cuadrado ΛM igual a AI y quítese NΞ igual a ZK y que esté en torno al mismo ángulo que ΛM; entonces ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. Así pues, como el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH es igual al cuadrado de EH, entonces, como AZ es a EH, así EH a ZH; y como AZ es a EH, así AI a EK; y como EH es a ZH, así EK a ZK [VI 11]; y como AI es a EK, así EK a ZK, luego EK es media proporcional de los (rectángulos) AI, ZK. Y MN es también media proporcional de los cuadrados ΛM, NΞ; y AI es igual a ΛM y ZK a NΞ; por tanto EK es igual a MN. Pero MN es igual a ΛΞ, y EK es igual a ΔΘ; entonces también el (rectángulo) entero ΔK es igual al gnomon ΥΦX y NΞ; y AK es igual a ΛM, NΞ; luego el resto AB es igual a ΣT, es decir al cuadrado de ΛN; por tanto, ΛN es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Digo que ΔN es una segunda apótoma de una medial.

Pues como se ha demostrado que AI, ZK son mediales y son también iguales a los (cuadrados) de ΛO, ON, entonces cada uno de los (cuadrados) de ΛO, ON es también medial; luego cada una de las (rectas) ΛO, ON es también medial. Y puesto que AI es conmensurable con ZK [VI 1 y X 11], entonces el (cuadrado) de ΛO es también conmensurable con el (cuadrado) de ON. Como se ha demostrado, a su vez, que AI es inconmensurable con EK, entonces ΛM es también inconmensurable con MN, es decir, el cuadrado de ΛO con el (rectángulo comprendido) por ΛO, ON; de modo que ΛO es también inconmensurable con ON [VI 1 y X 11]; luego ΛO, ON son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado.

Digo ahora que también comprenden un (rectángulo) medial.

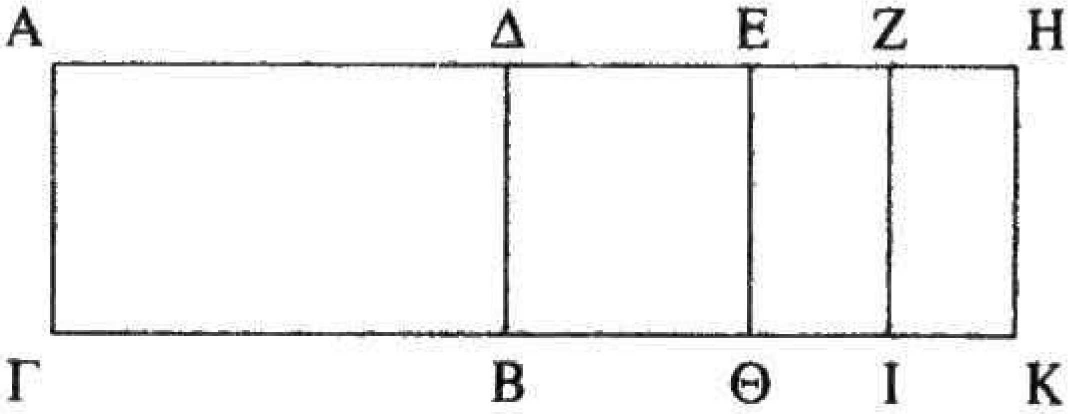
Pues como se ha demostrado que EK es medial y es igual al (rectángulo comprendido) por ΛO, ON, entonces el (rectángulo comprendido) por ΛO, ON es también medial; de modo que ΛO, ON son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial. Luego ΛN es una segunda apótoma de una medial [X 75]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

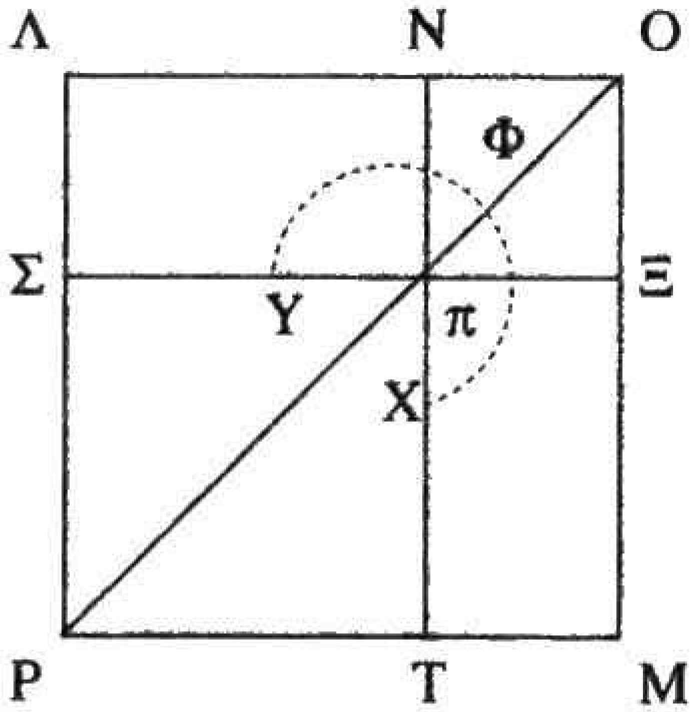
Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es una segunda apótoma de una medial. Q. E. D.

Proposición 94

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una cuarta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una (recta) «menor».

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la cuarta apótoma AΔ.





Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una (recta) «menor».

Pues sea ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y AH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AΓ, y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 4]. Pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH deficiente en la figura de un cuadrado, la dividirá en (partes) inconmensurables [X 18]. Así pues, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E y aplíquese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH. Trácense, pues, por los (puntos) E, Z, H las (rectas) EΘ, ZI, HK paralelas a AΓ, BΔ. Como en efecto AH es expresable y conmensurable en longitud con AΓ, entonces el (área) entera AK es expresable [X 19]. Y puesto que, a su vez, ΔH es inconmensurable en longitud con AΓ y ambas son expresables, entonces ΔK es medial [X 21]. Y puesto que a su vez AZ es inconmensurable en longitud con ZH, entonces AI es también inconmensurable con ZK [VI 1 y X 11]. Pues bien, constrúyase el cuadrado ΛM igual a AI y quítese NΞ igual a ZK y que está en torno al mismo ángulo ΛOM. Entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. Así pues, como el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH es igual al (cuadrado) de EH, entonces, proporcionalmente, como AZ es a EH, así AI a EK, y como EH es a ZH, así EK a ZK [VI 1]; entonces EK es media proporcional de AI, ZK [V 11]. Pero MN es también media proporcional de los cuadrados ΛM, NΞ y AI es igual a ΛM, y ZK a NΞ; luego EK es igual a MN. Pero ΔΘ; es igual a EK y ΛΞ es igual a MN. Por tanto, el (área) entera ΔK es igual al gnomon ΥΦX y NΞ. Pues bien, como el (área) entera AK es igual a los cuadrados ΛM, NΞ donde ΔK es igual al gnomon ΥΦX y el cuadrado NΞ, entonces el (área) restante AB es igual a ΣT, es decir al cuadrado de ΛN; luego ΛN es el lado del cuadrado equivalente al (área) AB.

Digo que ΛN es la (recta) no expresable llamada «menor». Pues como AK es expresable y es igual a los (cuadrados) de ΛO, ON, entonces la suma de los (cuadrados) de ΛO, ON es expresable. Como ΔK es a su vez medial y ΔK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON es medial. Y puesto que se ha demostrado que AI es inconmensurable con ZK, entonces el cuadrado de ΛO es inconmensurable también con el cuadrado de ON. Luego ΛO, ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial. Por tanto, ΛN es la recta no expresable llamada «menor» [X 76]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es una (recta) «menor». Q. E. D.

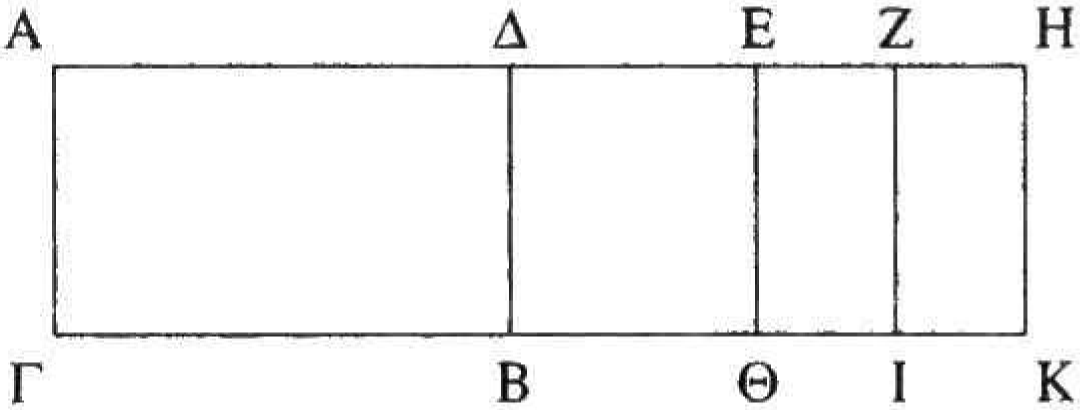
Proposición 95

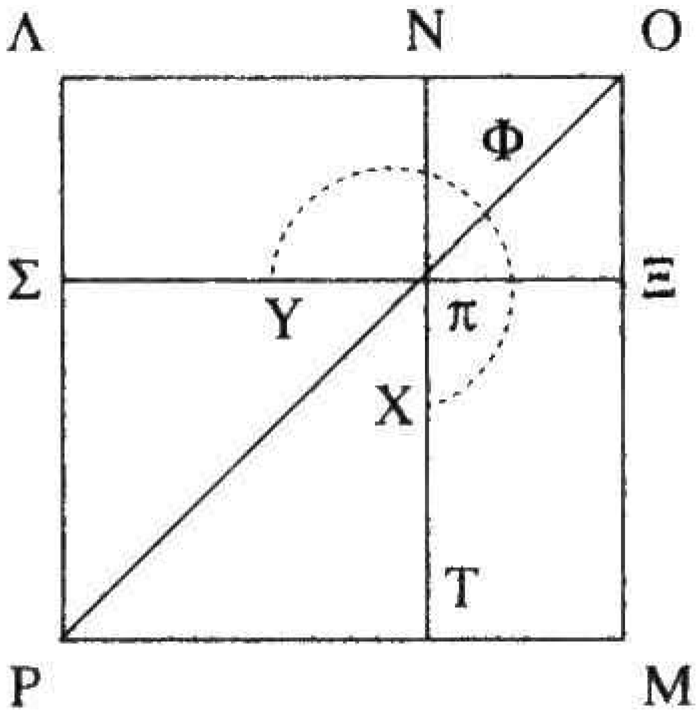
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la quinta apótoma AΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea, pues, ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y la (recta) adjunta HΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AΓ, y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AH) [X Ter. Def. 5]. Entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH, deficiente en la figura de un cuadrado, la dividirá en partes inconmensurables [X 18]. Pues bien, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíqese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH. Y puesto que AH es inconmensurable en longitud con ΓA y ambas son expresables, entonces AK es medial [X 21]. Como ΔH es a su vez expresable y conmensurable en longitud con AΓ, ΔK es expresable [X 19]. Así pues, construyase el cuadrado ΛM igual a AI, y quítese el cuadrado NΞ igual a ZK que esté en torno al mismo ángulo ΛOM; entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea OP su diagonal y constrúyase la figura. De manera semejante demostraríamos que ΛN es el lado del cuadrado igual al área AB.





Digo que ΛN es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Pues como se ha demostrado que AK es medial y es igual a los (cuadrados) de ΛO, ON, entonces la suma de los (cuadrados) de ΛO, ON es medial. Y puesto que ΔK es a su vez expresable y es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON, también éste mismo es expresable. Y como AI es inconmensurable con ZK, entonces el (cuadrado) de ΛO es inconmensurable con el cuadrado de ON. Luego ΛO, ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable. Por tanto, la (recta) restante ΛN es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 77]. Y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial. Q. E. D.

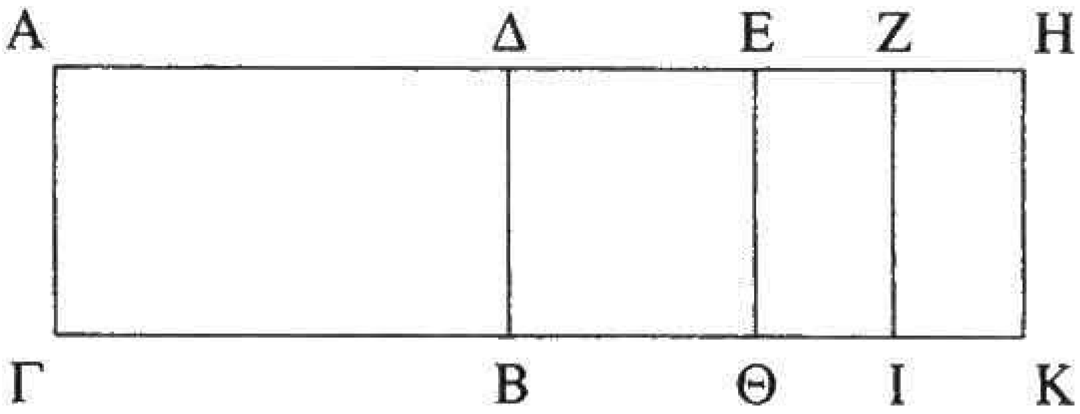
Proposición 96

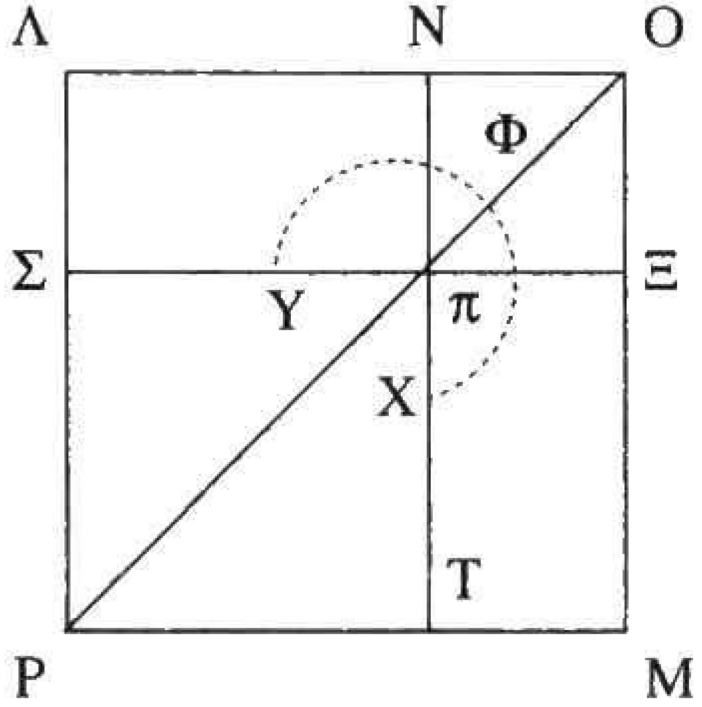
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un área medial un (área) entera medial.

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable AΓ y la sexta apótoma AΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente a AB es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues sea ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y ninguna de. ellas es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AΓ y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 6]: pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) ΔH deficiente en la figura de un cuadrado, lo dividirá en partes inconmensurables [X 18].





Así pues, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de EH, deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH. Pero, como AZ es a ZH, así AI a ZK [VI 1]; luego AI es inconmensurable con ZK [X 11]. Y puesto que AH, AΓ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, AK es medial [X 21]. Puesto que AΓ, ΔH son, a su vez, expresables e inconmensurables en longitud, ΔK es también medial [X 21]. Pues bien, como AH, HΔ son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con HΔ. Pero como AH es a HΔ, así AK a KΔ [VI 1]; luego AK es inconmensurable con KΔ [X 11], Constrúyase, pues, el cuadrado ΛM igual a AI, y quítese NΞ igual a ZK y en torno al mismo ángulo; entonces los cuadrados ΛM, NΞ están en torno a la misma diagonal [X 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que ΛN es el lado del cuadrado equivalente al (área) AB.

Digo que ΛN es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues como se ha demostrado que AK es medial y es también igual a los (cuadrados) de ΛO, ON, entonces la suma de los (cuadrados) de ΛO, ON es medial. Como se ha demostrado a su vez que ΔK es medial y es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON, el doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON es medial. Y como se ha demostrado que AK es inconmensurable con ΔK, los cuadrados de ΛO, ON son también inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ΛO, ON. Y puesto que AI es inconmensurable con ZK, entonces el (cuadrado) de ΛO es inconmensurable con el (cuadrado) de ON; luego ΛO, ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial y además sus cuadrados inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas. Por tanto, ΛN es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 78]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB.

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un (área) medial un área entera medial. Q. E. D.

Proposición 97

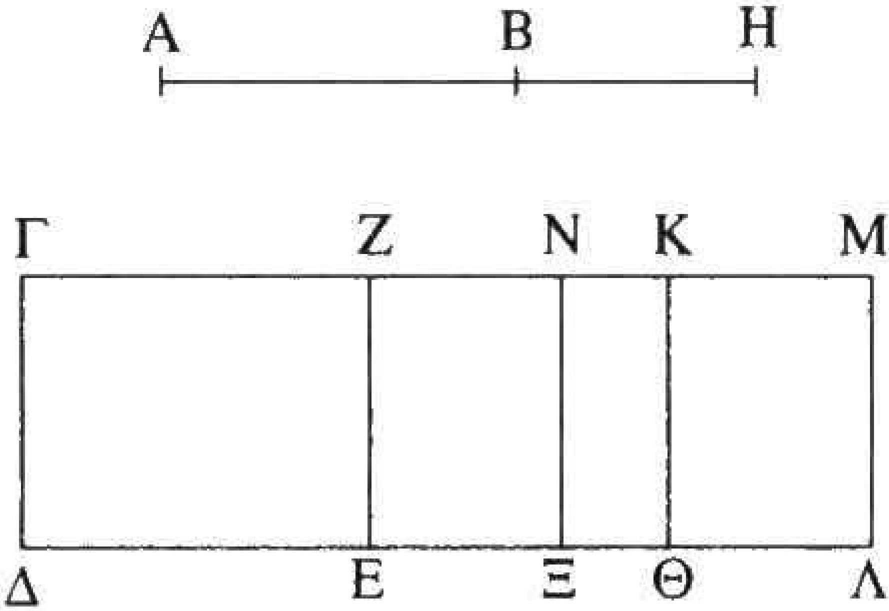
El cuadrado de una apótoma aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una primera apótoma.

Sea AB la apótoma y ΓΔ la (recta) expresable y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al cuadrado de AB que produzca la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una primera apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH, y el (paralelogramo) KΛ igual al cuadrado de BH. Entonces el (paralelogramo) entero ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB; luego el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7], Divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese por el (punto) N la (recta) NΞ paralela a ΓΛ; entonces cada uno de los (rectángulos) ZΞ, ΛN es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y como los (cuadrados) de AH, HB son expresables, y ΔM es igual a los (cuadrados) de AH, HB, entonces ΛM es expresable, y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΛ produciendo la anchura ΓM; luego ΓM es expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Como el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es a su vez medial, y ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces ZΛ es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ZM; entonces ZM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Y como los (cuadrados) de AH, HB son expresables, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial, entonces los (cuadrados) de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB y

ΖΛ al doble del (rectángulo comprendido) por ΑΗ, ΗΒ; así pues ΔΜ es inconmensurable con ΖΛ. Pero, como ΔΜ es a ΖΛ, así ΓΜ a ΖΜ [VI 1]. Entonces ΓΜ es inconmensurable en longitud con ΖΜ [X 11]. Y ambas son expresables; luego ΓΜ, ΜΖ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, ΓΖ es una apótoma [X 73],



Digo ahora que es también primera.

Pues como el (rectángulo comprendido) por ΑΗ, ΗΒ es media proporcional de los cuadrados de ΑΗ, ΗΒ, y ΓΘ es igual al (cuadrado) de ΑΗ, mientras que ΚΛ es igual al (cuadrado) de ΒΗ y ΝΛ al (rectángulo comprendido) por ΑΗ, ΗΒ, entonces ΝΛ es media proporcional de ΓΘ, ΚΛ; luego, como ΓΘ es a ΝΛ, así ΝΛ a ΚΛ. Pero como ΓΘ es a ΝΛ, así ΓΚ a ΝΜ; y como ΝΛ es a ΚΛ, así ΝΜ a ΚΜ [VI 1]; entonces el (rectángulo comprendido) por ΓΚ, ΚΜ, es igual al (cuadrado) de ΝΜ [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ΖΜ. Ahora bien, puesto que el (cuadrado) de ΑΗ es conmensurable con el de ΗΒ, ΓΘ es también conmensurable con ΚΛ. Pero como es ΓΘ a ΚΛ, así ΓΚ a ΚΜ [VI 1]; entonces ΓΚ es conmensurable con ΚΜ [X 11], Pues bien, como ΓΜ, ΜΖ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓΜ el (rectángulo comprendido) por ΓΚ, ΚΜ igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΖΜ y deficiente on la figura de un cuadrado, y ΓΚ es conmensurable con ΚΜ, entonces el cuadrado de ΓΜ es mayor que el de ΜΖ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΓΜ) [X 17]. Y ΓΜ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; por tanto ΓΖ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1].

Por consiguiente, el (cuadrado) de una apótoma aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una primera apótoma. Q. E. D.

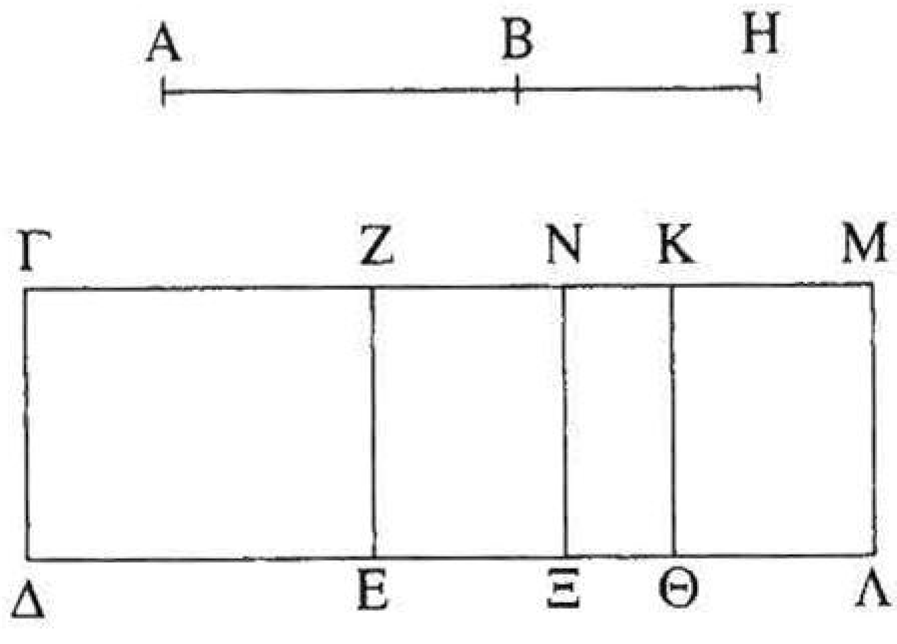
Proposición 98

El cuadrado de una primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una segunda apótoma.

Sea, pues, AB la primera apótoma de una medial y ΓΔ la (recta) expresable, y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una segunda apótoma.

Pues sea BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable [X 74]. Y aplíquese a ΓΔ el paralelogramo ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK, y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de HB produciendo la anchura KM; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; así pues ΓΛ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; entonces ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22], Y como ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB donde el (cuadrado) de AB es igual a ΓE, entonces el (área) restante, el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, es igual a ZΛ [II 7], Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es expresable; luego ZΛ es expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM; por tanto, ZM es también expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Pues bien, como (la suma de) los (cuadrados) de AH, HB, es decir ΓΛ, es medial, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, es decir, ZΛ es expresable, entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a ZM [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con ZM [X 11]: y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto, ΓZ es una apótoma [X 73].



Digo ahora que también es segunda.

Pues divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese, por el (punto) N, la (recta) NΞ paralela a ΓΔ; entonces cada una de las (áreas) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB; y puesto que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los (cuadrados) de AH, HB, y el cuadrado de AH es igual a ΓΘ, mientras que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es (igual) a NΛ y el (cuadrado) de BH a KΛ, entonces NΛ es media proporcional de ΓΘ, KΛ. Luego, como ΓΘ es a NΛ, así NΛ a KΛ. Pero como ΓΘ es a NΛ, así ΓK a NM, y como NΛ es a KΛ, así NM a MK [VI 1]; entonces, como ΓK es a NM, así NM a KM [V 11]; luego el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM es igual al (cuadrado) de NM [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales, y se ha aplicado a la mayor, ΓM, el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM igual a la cuarta parte del (cuadrado) de MZ, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en partes conmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΓM) [X 17]. Y la adjunta ZM es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; luego ΓZ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2]

Por consiguiente, el cuadrado de la primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una segunda apótoma. Q. E. D.

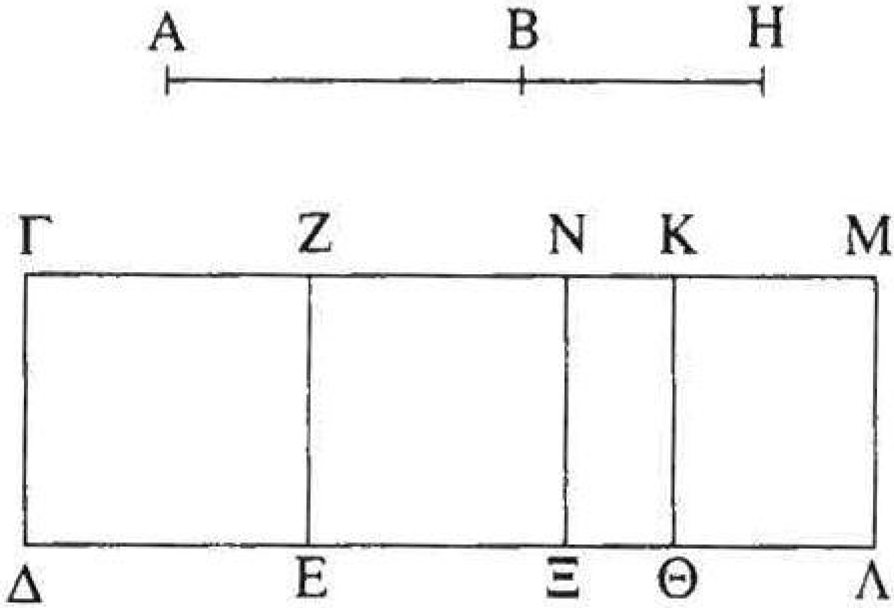
Proposición 99

El cuadrado de una segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una tercera apótoma.

Sea AB la segunda apótoma de una medial, y ΓΔ la (recta) expresable, y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una tercera apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial [X 75]. Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK, y aplíquese a KΘ el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadado) de BH produciendo la anchura KM; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; luego ΓΛ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; por tanto ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 23]. Y como el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante ΛZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7], Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese NΞ paralela a ΓΔ; entonces cada una de las (áreas) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Pero el (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial; entonces ZΛ es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable EZ produciendo la anchura ZM; luego ZM es también expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Y como AH, HB son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con HB; luego el (cuadrado) de AH es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AH, HB [VI 1 y X 11], Pero los (cuadrados) de AH, HB son conmensurables con el (cuadrado) de AH, y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB con el (rectángulo comprendido) por AH, HB; así pues, los (cuadrados) de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [X 13].



Pero ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, mientras que ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB; entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ.

Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a ZM [VI 1]. Entonces, ΓM es inconmensurable en longitud con ZM. Y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es apótoma [X 73].

Digo ahora que también es tercera.

Pues como el (cuadrado) de AH es conmensurable con el (cuadrado) de HB, entonces ΓΘ es conmensurable con KΛ; de modo que ΓK lo es también con KM [VI 1 y X 11], Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los (cuadrados) de AH, HB, y ΓΘ es igual a AH, mientras que KΛ es igual al (cuadrado) de HB, y NΛ al (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces NΛ es también media proporcional de ΓΘ, KΛ; luego, como ΓΘ es a NΛ así NΛ a KΛ. Pero como ΓΘ es a NΛ, así ΓK a NM, y como NΛ es a KΛ, así NM a KM [VI 1]; entonces, como ΓK es a MN, así MN a KM [V 11]; luego el rectángulo comprendido) por ΓK, KM es igual [al cuadrado de MN, es decir][40] a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓM un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) conmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓM) [X 17]; y ninguna de las (rectas) ΓM, MZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; por tanto ΓZ es una tercera apótoma [X Ter. Def. 3], Por consiguiente, el cuadrado de una segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una tercera apótoma. Q. E. D.

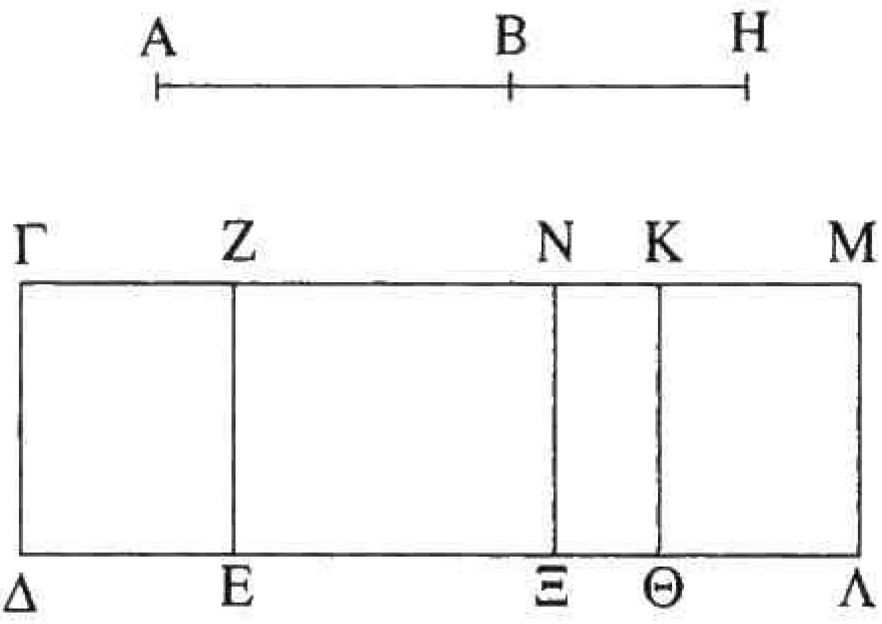
Proposición 100

El cuadrado de una (recta) «menor», aplicado a una (recta) expresable produce como anchura un cuarta apótoma.

Sea AB la (recta) «menor», y ΓΔ la expresable, y aplíquese a la (recta) expresable ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al cuadrado de AB, produciendo la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una cuarta apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas), inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de AH, HB expresable y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB medial [X 76], Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK, y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de BH produciendo la anchura KM; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB. Y la suma de los (cuadrados) de AH, HB es expresable; entonces ΓΛ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; luego ΓM es también expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Y como el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7], Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese, por el (punto) N, la (recta) NΞ paralela a las dos (rectas) ΓΛ, MΛ; entonces, cada uno de los (rectángulos) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y como el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial y es igual a ZΛ, entonces ZΛ también es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM; luego ZM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Y puesto que la suma de los (cuadrados) de AH, HB es expresable, mientras que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial, entonces los cuadrados de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB. Pero ΓΛ es igual a los cuadrados de AH, HB y ZΛ al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB. Luego ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11], Y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es una apótoma [X 73].



Digo que también es cuarta.

Pues como AH, HB son inconmensurables en cuadrado, entonces el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadrado) de HB. Y ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que KΛ es igual al (cuadrado) de HB; así pues, ΓΘ es inconmensurable con KΛ. Pero como ΓΘ es a KΛ, así ΓK a KM [VI 1], Entonces ΓK es inconmensurable en longitud con KM. Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de la suma de los (cuadrados) de AH, HB, y ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que el (cuadrado) de HB es igual a KΛ, y el (rectángulo comprendido) por AH, HB a NΛ, entonces NΛ es media proporcional de ΓΘ, KΛ; luego como ΓΘ es a NΛ; así NΛ a KΛ; pero como ΓΘ es a NΛ, así ΓK a NM y como NΛ es a KΛ, así NM a KM [VI 1]; entonces, como ΓK es a MN, así MN a KM [V 11]. Luego el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM es igual al (cuadrado) de MN [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales, y se ha aplicado a ΓM el (rectángulo comprendido) por ΓK, KM igual a la cuarta parte del (cuadrado) de MZ, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) inconmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓM) [X 18]. Y la (recta) entera ΓM es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΓΔ; por tanto, ΓZ es una cuarta apótoma [X Ter. Def. 4].

Por consiguiente, el (cuadrado) de una (recta) «menor»... etc. Q. E. D.

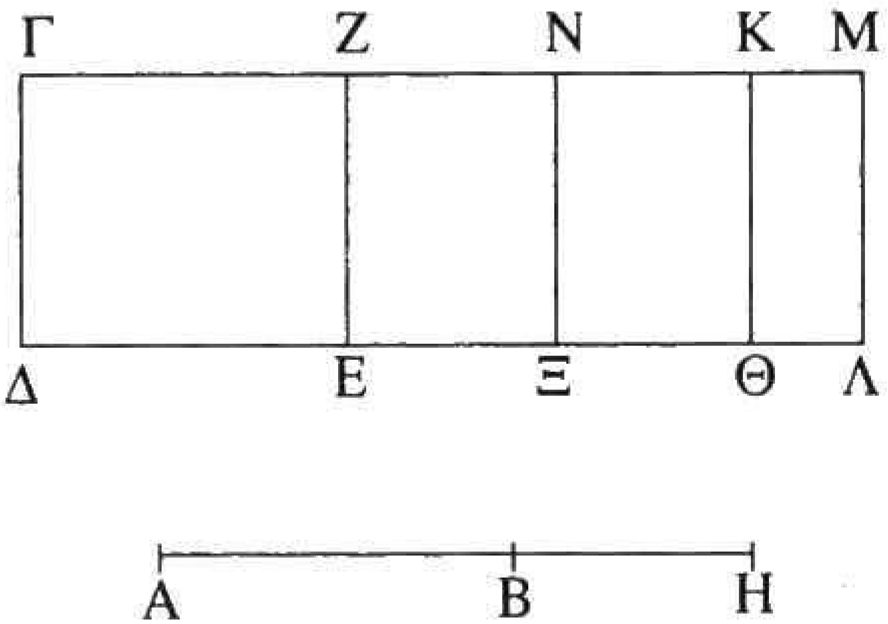
Proposición 101

El cuadrado de la recta que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una quinta apótoma.

Sea, pues, AB la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, y ΓΔ la (recta) expresable, y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una quinta apótoma.

Sea, pues, BH la (recta) adjunta a AB. Entonces, AH, HB son rectas inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 77]. Y aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH, y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de HB; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB. Pero la suma de los (cuadrados) de AH, HB es medial; entonces ΓΛ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΛ produciendo la anchura ΓM; luego ΓM es expresable e inconmensurable con ΓΔ [X 22]. Y como el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese por el (punto) N, la (recta) NΞ paralela a las dos (rectas) ΓΔ, MΛ; entonces cada uno de los (rectángulos) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es expresable y es igual a ZΛ, entonces ZΛ es expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura ZM; luego ZM es expresable y conmensurable en longitud con ΓΔ [X 20]. Y como ΓΛ es medial y ZΛ expresable, entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11]. Y ambas son expresables; luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es una apótoma [X 73].



Digo ahora que también es quinta.

Pues de manera semejante demostraríamos que el (rectángulo) ΓK, KM es igual al (cuadrado) de NM, es decir, a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM.

Y puesto que el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadrado) de HB, mientras que el (cuadrado) de AH es igual a ΓΘ, y el (cuadrado) de HB a KΛ, entonces ΓΘ es inconmensurable con KΛ. Pero como ΓΘ es a KΛ, así ΓK a KM [VI 1]; luego ΓK es inconmensurable en longitud con KM [X 11]. Pues bien, como ΓM, MZ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓM un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de ZM, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) inconmensurables, entonces, el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓM) [X 18]. Y la adjunta ZM es conmensurable con la (recta) expresable propuesta ΓΔ.

Por consiguiente, ΓZ es una quinta apótoma [X Ter. Def. 5]. Q. E. D.

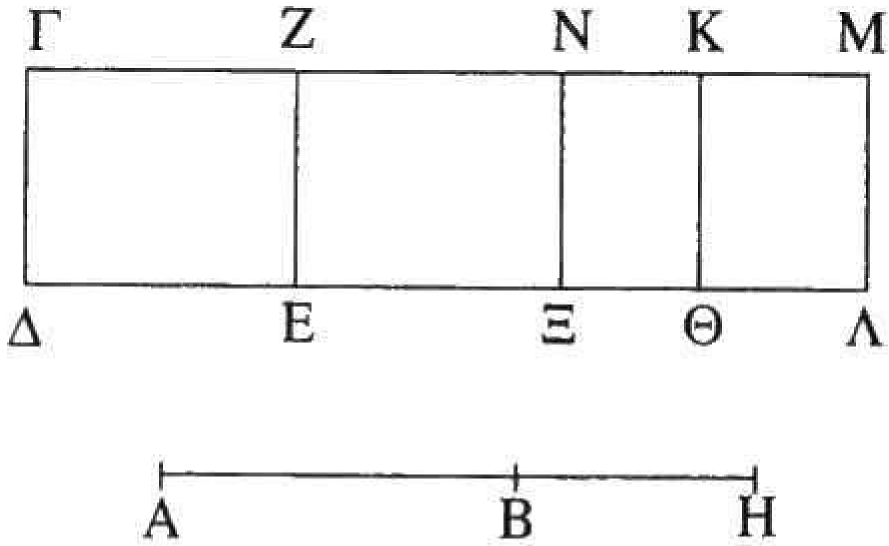
Proposición 102

El cuadrado de la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una sexta apótoma.

Sea, pues, AB la que hace con un (área) medial un (área) entera medial y ΓΔ la (recta) expresable, y apliqúese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΓZ.

Digo que ΓZ es una sexta apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB, son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB medial y los cuadrados de AH, HB inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [X 78]. Pues bien, aplíquese a ΓΔ el (paralelogramo) ΓΘ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK y el (paralelogramo) KΛ igual al (cuadrado) de BH; entonces el (área) entera ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; luego ΓΛ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΓΔ produciendo la anchura ΓM; así pues, ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22]. Pues bien, como ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces, el (área) restante ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial; luego ZΛ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM; luego ZM es expresable e inconmensurable en longitud con ΓΔ [X 22], Y puesto que los (cuadrados) de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB y ΓΛ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, y ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces ΓΛ es inconmensurable con ZΛ. Pero como ΓΛ es a ZΛ, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11], Y ambas son expresables. Luego ΓM, MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto ΓZ es una apótoma [X 73],



Digo ahora que también es sexta.

Pues como ZΛ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese por el (punto) N la (recta) NΞ paralela a ΓΔ; entonces cada una de las (áreas) ZΞ, NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y como AH, HB son inconmensurables en cuadrado, entonces el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadrado) de HB. Pero ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, y KΛ es igual al (cuadrado) de HB. Así pues, ΓΘ es inconmensurable con KΛ. Pero como ΓΘ es a KΛ, así ΓK a KM [VI 1]; luego ΓK es inconmensurable con KM [X 11]; y puesto que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los cuadrados de AH, HB, y ΓΘ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que KΛ es igual al (cuadrado) de HB, y NΛ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces NΛ es también media proporcional de ΓΘ, KΛ; por tanto, como ΓΘ es a NΛ, así NΛ a KΛ. Y por lo mismo, el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓM) [X 18]. Y ninguna de ellas es conmensurable con la (recta) expresable propuesta ΓΔ.

Por consiguiente, ΓZ es una sexta apótoma. Q. E. D.

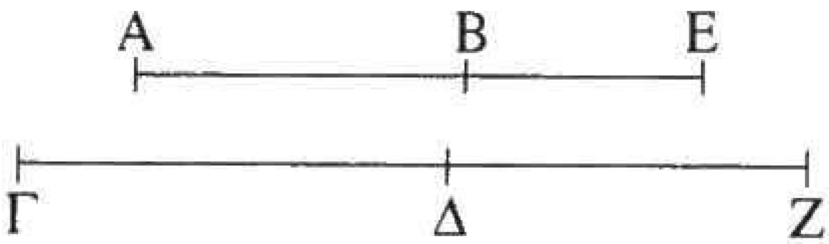
Proposición 103

Una recta conmensurable en longitud con una apótoma es apótoma y del mismo orden.

Sea AB una apótoma, y sea ΓΔ conmensurable en longitud con ella.

Digo que ΓΔ es apótoma y del mismo orden que AB.

Pues como AB es una apótoma, sea BE la adjunta a ella; entonces AE, EB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y hágase de forma que ΓΔ guarde con AB la misma razón que BE con ΔZ [VI 12]; entonces como una es a una, así todas a todas [V 12][41]; luego como la (recta) entera AE es a la (recta) entera ΓZ, así también AB a ΓΔ. Pero AB es conmensurable en longitud con ΓΔ. Entonces AE es también conmensurable con Γz y BE con ΔZ [X 11]. Ahora bien, AE, EB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΓZ, ZΔ son también (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 13].



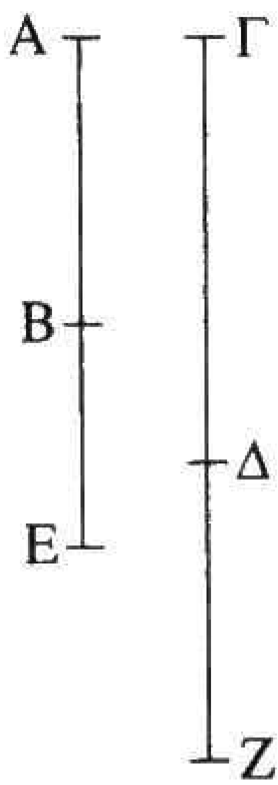
Ahora bien, dado que, como AE es a ΓZ, así BE a ΔZ, entonces, por alternancia, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ [VI 16]. Así pues, el cuadrado de AE es mayor que el de EB o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (AE), o bien en el de una inconmensurable con ella. Pues bien, si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), el cuadrado de ΓZ también será mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓZ) [X 14]. Y si AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también lo será ΓZ [X 12], pero, si BE, también ΔZ [id], y si ninguna de las (rectas) AE, EB (lo es), tampoco (lo será) ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ [X 13]. Pero si el cuadrado de AE es mayor que [el de EB] en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), el cuadrado de ΓZ será también mayor que el de ZΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓZ) [X 14]. Ahora bien, si AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ΓZ. y si BE (lo es), también ΔZ [X 12], pero si no lo es ninguna de las (rectas) AE, EB tampoco lo será ninguna de las (rectas) ΓZ, ZΔ [X 13].

Por consiguiente, ΓΔ es apótoma y del mismo orden que AB. Q. E. D.

Proposición 104

Una recta conmensurable con una apótoma de una medial es apótoma de una medial y del mismo orden.

Sea, pues, AB una apótoma de una medial, y sea ΓΔ conmensurable en longitud con AB; digo que ΓΔ es también apótoma de una medial y del mismo orden que AB.



Pues como AB es una apótoma de una medial, sea EB la adjunta. Entonces AE, EB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado [X 74, 75]. Y hágase de forma que, como AB es a ΓΔ, así BE a ΔZ [VI 12]; entonces AE es también conmensurable con ΓZ y BE con ΔZ [V 12 y X 11]. Pero AE, EB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado; entonces ΓZ, ZΔ son también rectas mediales [X 23] conmensurables sólo en cuadrado [X 13]; luego ΓΔ es apótoma de una medial [X 74, 75].

Digo ahora que es también del mismo orden que AB.

Pues, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ, entonces, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo comprendido) por AE, EB, así el (cuadrado) de ΓZ al (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ. Pero el (cuadrado) de AE es conmensurable con el de ΓZ; luego el (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ [V 6 y X 11], Pues bien, si el (rectángulo comprendido) por AE, EB es expresable, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ será también expresable [X Def. 4], si el (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es también medial [X 23 Por.].

Por consiguiente, ΓΑ es una apótoma de una medial y del mismo orden que AB. Q. E. D.

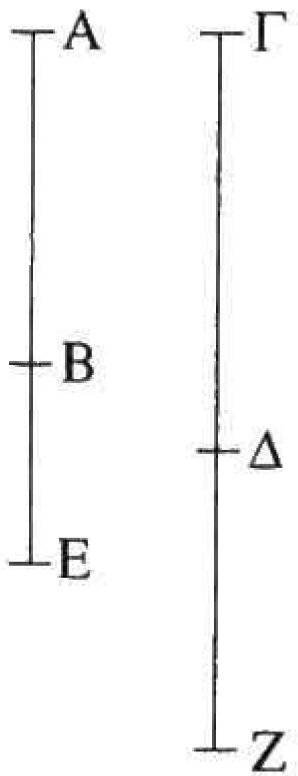
Proposición 105

Una (recta) conmensurable con una (recta) «menor» es «menor».

Sea, pues, AB la recta «menor» y ΓΔ conmensurable con ella.

Digo que ΓΔ es «menor».

Pues hágase lo mismo (que antes); y como AE, EB son inconmensurables en cuadrado [X 76], entonces ΓZ, ZΔ son también inconmensurables en cuadrado [X 13]. Pues bien, dado que, como AE es a EB, así ΓΔ a ZΔ [VI 12 y V 16], entonces, como el (cuadrado) de AE es al de EB, así también el (cuadrado) de ΓZ al de ZΔ [VI 22], Luego, por composición, como los (cuarados) de AE, EB son al (cuadrado) de EB, así los (cuadrados) de ΓZ, ZΔ al (cuadrado) de ZΔ [V 18]; pero el (cuadrado) de BE es conmensurable con el de ΔZ; entonces la suma de los cuadrados de AE, EB es conmensurable con la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ [V 16 y X 11]. Pero la suma de los cuadrados de AE, EB es expresable [X 76], así pues, la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ es también expresable [X Def. 4]. Puesto que, a su vez, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo comprendido) por AE, EB, así el (cuadrado) de ΔZ al (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ, mientras que el (cuadrado) de AE es conmensurable con el cuadrado de ΓZ, entonces, el (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ. Pero el (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial [X 76]; entonces el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ es también medial [X 23 Por.]; luego ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial.

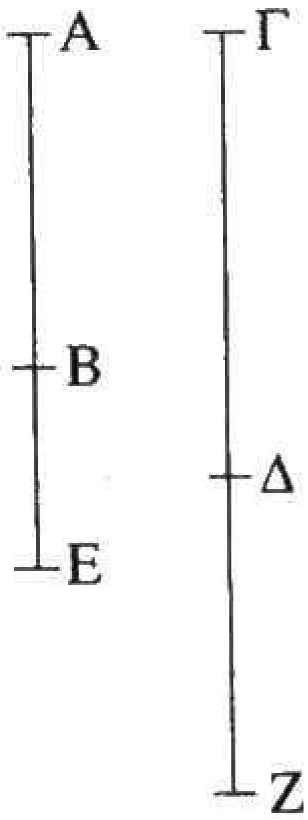


Por consiguiente, ΓΔ es «menor». Q. E. D.

Proposición 106

Una (recta) conmensurable con la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial es también una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea AB la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial y ΓΔ conmensurable con ella.



Digo que ΓΔ es también una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea, pues, BE la adjunta a AB; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de AE, EB medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 77]. Sígase la misma construcción (que antes). Demostraríamos de manera semejante a los (teoremas) anteriores que ΓZ, ZΔ guardan la misma razón que AE, EB y la suma de los cuadrados de AE, EB es conmensurable con la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; de modo que ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable.

Por consiguiente, ΓΔ es una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 77], Q. E. D.

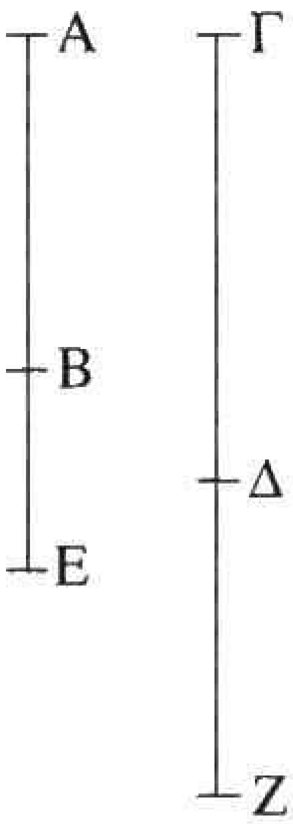
Proposición 107

Una (recta) conmensurable con la que hace con un (área) medial un (área) entera medial es también ella misma una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Sea AB una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial y sea ΓΔ conmensurable con AB.

Digo que ΓΔ es también una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Sea, pues, BE la adjunta a AB, y sígase la misma construcción; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas [X 78]. Ahora bien, según se ha demostrado, AE, EB son conmensurables con ΓZ, ZΔ, y la suma de los cuadrados de AE, EB con la suma de los cuadrados de ΓZ, ZΔ, y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZΔ; entonces ΓZ, ZΔ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas.



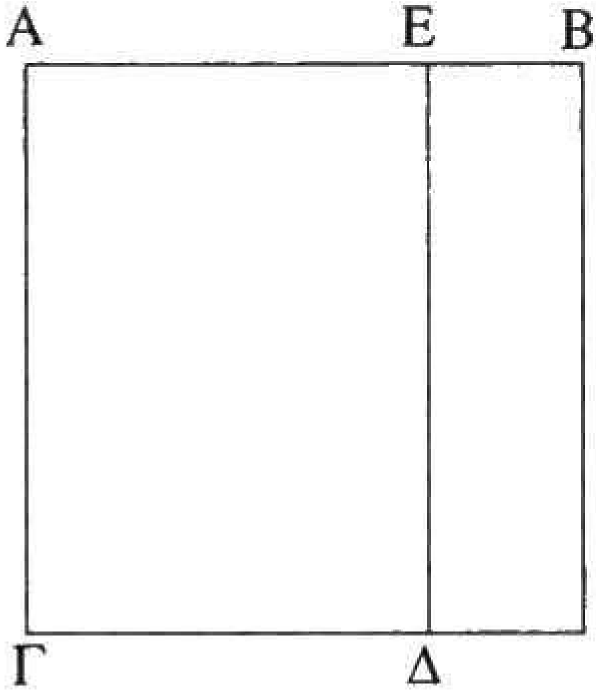
Por consiguiente, ΓΔ es una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 78]. Q. E. D.

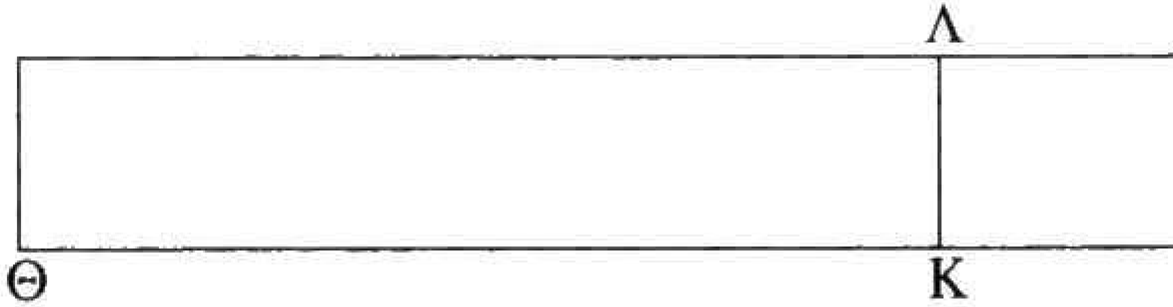
Proposición 108

Si de un (área) expresable se quita un (área) medial, el lado del cuadrado equivalente al área restante es una de estas dos (rectas) no expresables: o bien una apótoma o bien una «menor».

Quítese, pues, del (área) expresable ΒΓ el (área) medial ΒΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área restante ΕΓ es una de estas dos (rectas) no expresables; o bien una apótoma o bien una «menor».





Pues póngase la (recta) expresable ZH, y apliqúese a ZH el paralelogramo rectángulo HΘ igual a BΓ, y quítese el (paralelogramo) HK igual a ΔB; entonces el (área) restante EΓ es igual a ΛΘ. Pues bien, como BΓ es expresable, mientras que BΔ es medial, y BΓ es igual a HΘ, mientras que BΛ es (igual) a HK, entonces HΘ es expresable y HK medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ZH; luego ZΘ es expresable y conmensurable en longitud con ZH [X 20]; y ZK es expresable e inconmensurable en longitud con ZH [X 22]; por tanto, ZΘ es inconmensurable en longitud con ZK [X 13]. Entonces ZΘ, ZK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego KΘ es una apótoma [X 73], y KZ la adjunta a ella. Entonces el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) o conmensurable con (ΘZ) o no.

Sea, en primer lugar, su cuadrado mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable. Ahora bien, la (recta) entera ΘZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH; luego KΘ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1]. Pero el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una primera apótoma, es una apótoma [X 91]. Luego el lado del cuadrado equivalente a ΛΘ, es decir a ΕΓ, es una apótoma.

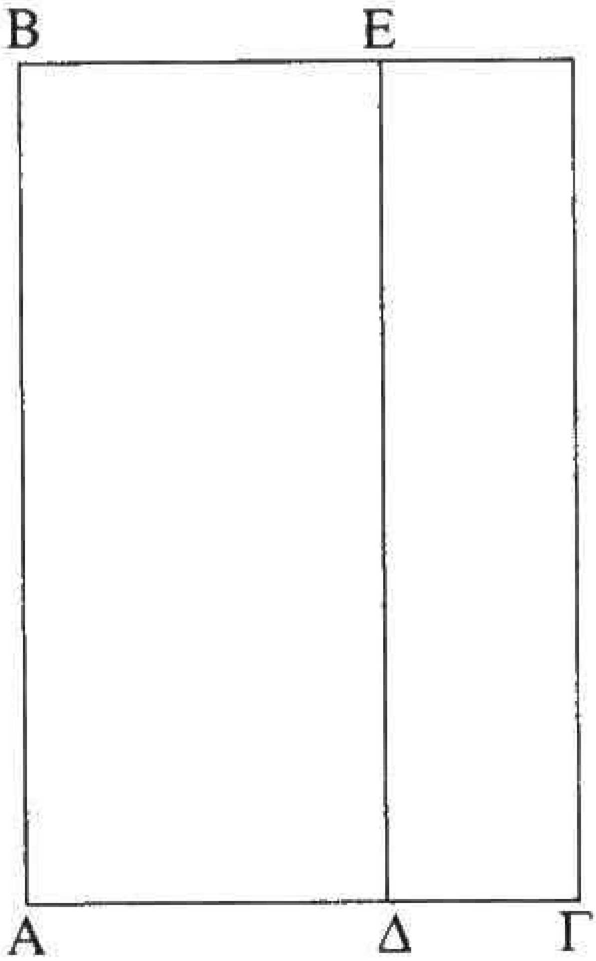
Pero si el cuadrado de ΘΖ es mayor que el de ΖΚ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΘΖ) y la (recta) entera ΖΘ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΖΗ, ΚΘ es una cuarta apótoma [X Ter. def. 4]. Y el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una cuarta apótoma es una (recta) «menor» [X 92]. Q. E. D.

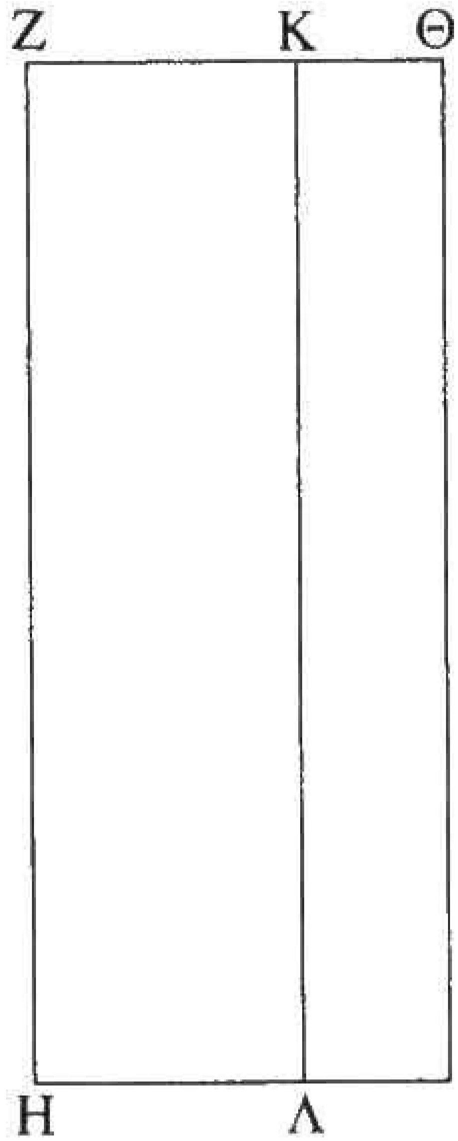
Proposición 109

Si se quita de un (área) medial un (área) expresable, resultan otras dos rectas no expresables: o bien la primera apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Quítese, pues, del (área) medial ΒΓ el (área) expresable ΒΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) restante ΕΓ es una de estas dos (rectas) no expresables, o bien la primera apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.





Pues bien, póngase la (recta) expresable ZH y aplíquense las áreas de manera semejante (a los teoremas precedentes). Ahora, en consecuencia, ZΘ es expresable e inconmensurable en longitud con ZH, mientras que KZ es expresable y conmensurable en longitud con ZH; entonces ZΘ, ZK son (rectas) expresabas conmensurables sólo en cuadrado [X 13], luego KΘ es una apótoma y ZK la adjunta a ella [X 73]. Así pues, el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (ΘZ) o bien en el de una inconmensurable con ella.

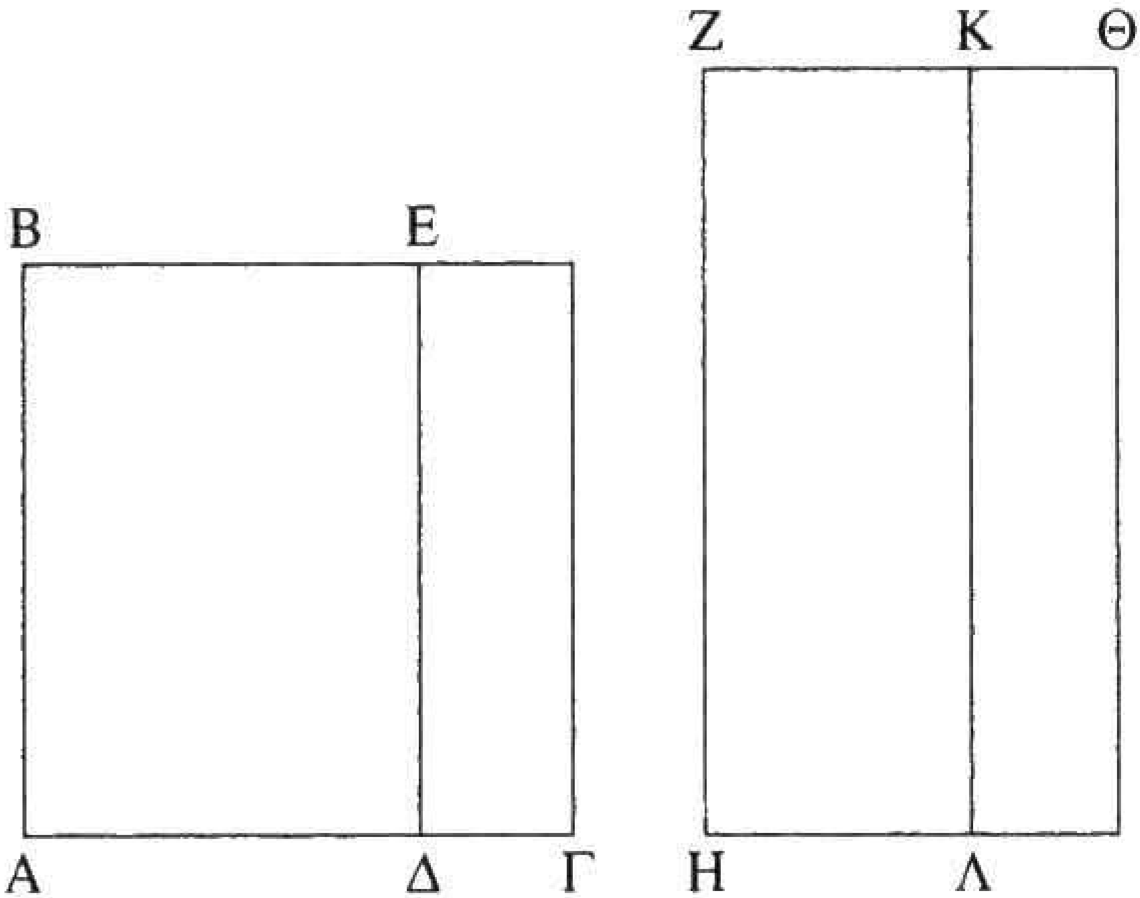
Pues bien, si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΘZ), y la adjunta a ella, ZK, es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2]. Pero ZH es expresable; de modo que el lado del cuadrado equivalente al (área) ΛΘ, es decir a EΓ, es la primera apótoma de una medial [X 92].

Pero si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable, y la (recta) adjunta ZK es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una quinta apótoma [X Ter, Def. 5]; de modo que el lado del cuadrado equivalente a ЕΓ es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 95] Q. E. D.

Proposición 110

Si se quita de un (área) medial otra (área) medial inconmensurable con el (área) entera, resultan las dos (rectas) no expresables restantes: o bien la segunda apótoma de una medial o bien la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Quítese, pues, como en las construcciones anteriores, del (área) medial ΒΓ, el (área) medial ΒΔ inconmensurable con el (área) entera.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) ΕΓ es una de estas dos (rectas) no expresables, o bien la segunda apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues como cada una de las (áreas) ΒΓ, ΒΔ es medial, y ΒΓ es inconmensurable con ΒΔ, en consecuencia, cada una de las dos (rectas) ΖΘ, ΖΚ será expresable e inconmensurable en longitud con ΖΗ [X 22]. Y puesto que ΒΓ es inconmensurable con ΒΔ, es decir ΗΘ con ΗΚ, ΘΖ es también inconmensurable con ΖΚ [VI 1 y X 11]; luego

ZΘ, ZK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, KΘ es una apótoma [X 73].

Ahora bien, si el cuadrado de ZΘ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZΘ) y ninguna de las (rectas) ZΘ, ZK es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una tercera apótoma [X Ter. Def. 3]. Pero KΛ es expresable, y el (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una tercera apótoma no es expresable, y el lado del cuadrado equivalente a él tampoco es expresable y se llama segunda apótoma de una medial [X 93]; de modo que el lado del cuadrado equivalente a ΛΘ, es decir a EΓ, es una segunda apótoma de una medial.

Pero si el cuadrado de ZΘ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZΘ) y ninguna de las (rectas) ΘZ, ZK es conmensurable en longitud con ZH, KΘ es una sexta apótoma [X Ter. Def. 6]. Pero el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una sexta apótoma es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 96].

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente a ΛΘ, es decir a EΓ, es una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial. Q. E. D.

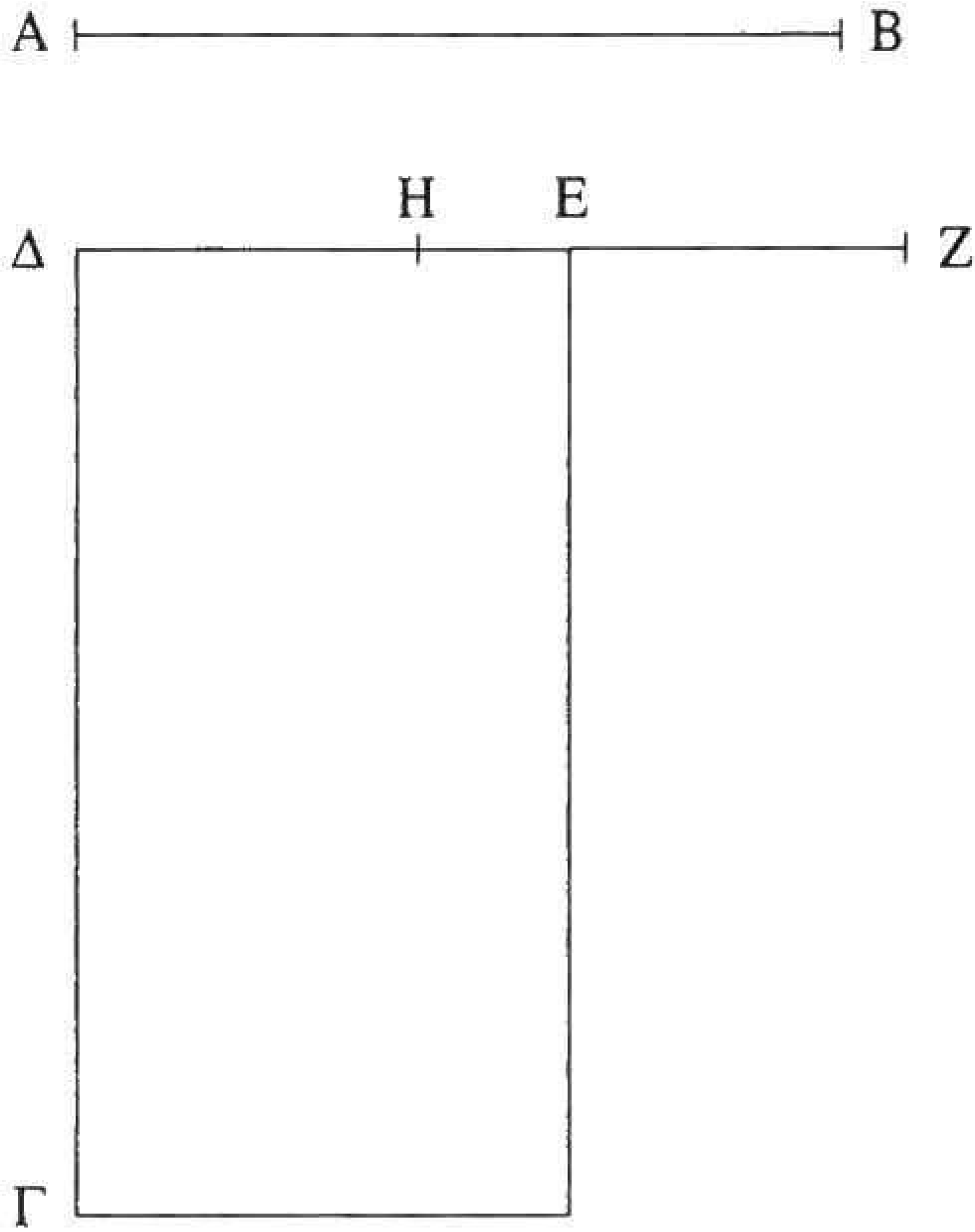
Proposición 111

La apótoma no es la misma que la binomial.

Sea AB una apótoma.

Digo que AB no es la misma que una binomial.

Pues, si es posible séalo. Póngase la (recta) expresable ΔΓ, y aplíquese a ΓΔ el rectángulo ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΔE. Pues bien, como AB es una apótoma, ΔE es una primera apótoma [X 97], Sea EZ la adjunta a ella; entonces ΔZ, ZE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de ΔZ es mayor que el de ZE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΔZ), y ΔZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΔΓ [X Ter. Def. 1]. Como, a su vez, AB es una binomial, entonces ΔE es una primera binomial [X 60]. Divídase en sus términos por el punto H, y sea ΔH el término mayor; entonces ΔH, HE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y el (cuadrado) de ΔH es mayor que el de HE en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔH), mientras que el (término) mayor ΔH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ΔΓ [X Seg. Def. 1]. Luego ΔZ es conmensurable en longitud con ΔH [X 12]; por tanto, la (recta) restante HZ es también conmensurable en longitud con ΔZ [X 15]. Pero ΔZ es inconmensurable en longitud con EZ; entonces ZH es también inconmensurable en longitud con EZ [X 13]. Luego HZ, ZE son (rectas) expresabas conmensurables sólo en cuadrado; por tanto EH es una apótoma [X 73]. Pero también es expresable; lo cual es imposible.



Por consiguiente, la apótoma no es la misma que la binomial. Q. E. D.

La apótoma y las (rectas) no expresables subsiguientes no son las mismas que la medial ni entre sí.

Pues el cuadrado de una medial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una (recta) expresable inconmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado [X 22], mientras que el cuadrado de una apótoma, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una primera apótoma [X 97], y el (cuadrado) de la primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una segunda apótoma [X 98], mientras que el (cuadrado) de la segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una tercera apótoma [X 99]; pero el (cuadrado) de una «menor», aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una cuarta apótoma [X 100]; y el cuadrado de la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una quinta apótoma [X 101], mientras que el cuadrado de la que hace con un (área) medial un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una sexta apótoma [X 102].

Pues bien, puesto que las antedichas anchuras difieren de la primera y entre sí, de la primera porque es expresable y entre sí porque no son del mismo orden, es evidente que también las propias (rectas) no expresables difieren entre sí. Y como se ha demostrado que la apótoma no es la misma que la binomial [X 111], sino que, aplicadas a una recta expresable, las subsiguientes a la apótoma producen como anchuras apótomas, cada una de acuerdo con su orden, mientras que las subsiguientes a la binomial (producen) como anchuras binomiales de acuerdo con su propio orden, entonces, las subsiguientes a la apótoma son diferentes y las subsiguientes a la binomial son diferentes, de modo que hay en la serie trece rectas no expresables en total:

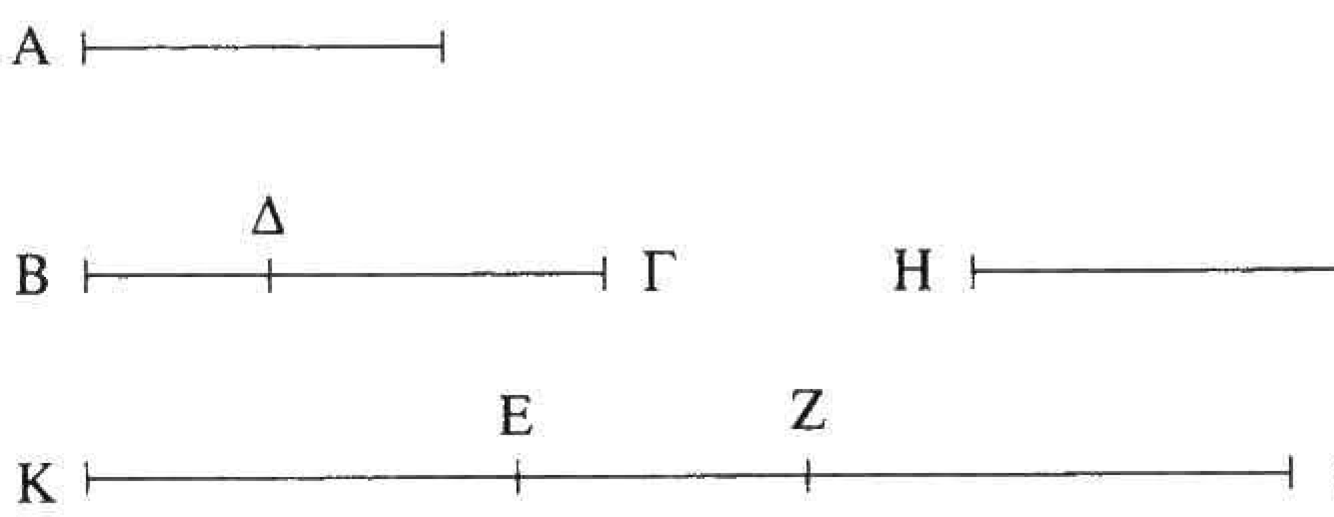
Medial.
Binomial.
Primera bimedial.
Segunda bimedial.
«Mayor».
Lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.
Lado del cuadrado equivalente a dos (áreas) mediales.
Apótoma.
Primera apótoma de una medial.
Segunda apótoma de una medial.
«Menor».
La que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.
La que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

[Proposición 112[42]

El cuadrado de una (recta) expresable, aplicado a una binomial produce como anchura una apótoma cuyos términos son conmensurables con los términos de la binomial y además guardan la misma razón y la apótoma resultante es del mismo orden que la binomial.

Sea Α la (recta) expresable y ΒΓ la binomial cuyo término mayor es ΔΓ, y sea el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, ΕΖ igual al (cuadrado) de Α.

Digo que ΕΖ es una apótoma cuyos términos son conmensurables con ΓΔ, ΔΒ y guardan la misma razón y además ΕΖ es del mismo orden que ΒΓ.



Pues sea a su vez el (rectángulo comprendido) por BΔ, H igual al (cuadrado) de A. Pues bien, puesto que el (rectángulo comprendido) por BΓ, EZ es igual al (rectángulo comprendido) por BΔ, H, entonces, como ΓB es a BΔ, así H a EZ [VI 16]. Pero ΓB es mayor que BΔ; entonces H es mayor que EZ [VI 16, V 14]. Sea EΘ igual a H; entonces, como ΓB es a BΔ, así ΘE a EZ; luego, por separación, como ΓΔ es a BΔ, así ΘZ a ZE [V 17]. Y hágase de forma que como ΘZ es a ZE, así ZK a KE; entonces la (recta) entera ΘK es a la (recta) entera KZ, como ZK es a KE, porque como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]. Pero como ZK es a KE, así ΓΔ a ΔB [V 11]; entonces, como ΘK es a KZ, así también ΓΔ es a ΔB [id.]. Pero el (cuadrado) de ΓΔ es conmensurable con el (cuadrado) de ΔB [X 36]; luego el (cuadrado) de ΘK es también conmensurable con el (cuadrado) de KZ [VI 22; X 11]. Ahora bien, como el cuadrado de ΘK es al (cuadrado) de KZ, así ΘK a KE, puesto que las tres (rectas) ΘK, KZ, KE son proporcionales [V Def. 9]. Por tanto, ΘK es conmensurable en longitud con KE; de modo que ΘE es también conmensurable en longitud con EK [X 15]. Y puesto que el cuadrado de A es igual al (rectángulo comprendido) por EΘ, BΔ, y el cuadrado de A es expresable, entonces el (rectángulo comprendido) por EΘ, BΔ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable BΔ; entonces EΘ es una (recta) expresable conmensurable en longitud con BΔ [X 20], de modo que EK, al ser conmensurable con ella, es también expresable y conmensurable en longitud con BΔ. Pues bien, dado que, como ΓΔ es a ΔB, así ZK a KE, mientras que ΓΔ, ΔB son conmensurables sólo en cuadrado, ZK, KE son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero KE es expresable, luego ZK es también expresable. Por tanto, ZK, KE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Así pues, EZ es una apótoma [X 73].

Ahora bien, el cuadrado de ΓΔ es mayor que el de ΔB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (ΓΔ) o en el de una inconmensurable con ella.

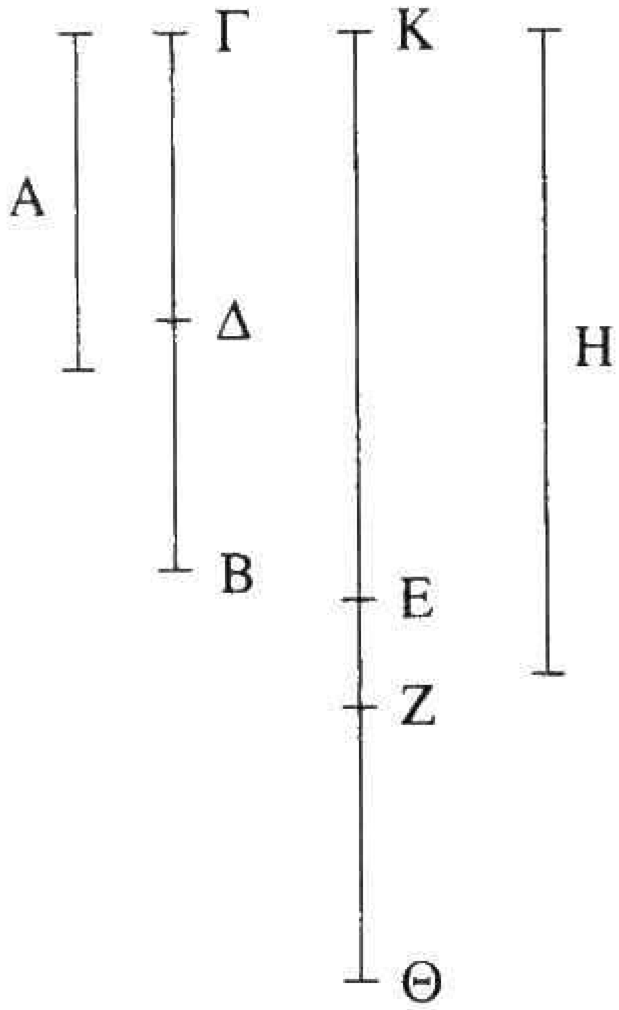
Pues bien, si el cuadrado de ΓΔ es mayor que el de ΔB en el cuadrado de una (recta) conmensurable, también el cuadrado de ZK es mayor que el de KE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZK) [X 14]. Y si ΓΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ZK lo es [X 11 y 12], pero si lo es BΔ, también KE [X 12]; y si no lo es ninguna de las dos (rectas) ΓΔ, ΔB, tampoco (lo será) ninguna de las dos (rectas) ZK, KE.

Ahora bien, si el cuadrado de ΓΔ es mayor que el de ΔB en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓΔ), también el cuadrado de ZK será mayor que el de KE en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (ZK) [X 14]. Y si ΓΔ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ZK lo es; pero si lo es BΔ, también KE, y si ninguna de las dos (rectas) ΓΔ, ΔB lo es, tampoco lo será ninguna de las (rectas) ZK, KE; de modo que ZE es una apótoma cuyos términos ZK, KE son conmensurables con los términos ΓΔ, ΔB de la binomial y guardan la misma razón; y (ZE) es del mismo orden que BΓ. Q. E. D.

Proposición 113

El cuadrado de una (recta) expresable, aplicado a una apótoma, produce como anchura una (recta) binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de la apótoma y guardan la misma razón, y además la binomial resultante es del mismo orden que la apótoma.

Sea, pues, A la recta expresable y BΔ la apótoma, y sea el (rectángulo comprendido) por BΔ, KΘ igual al (cuadrado) de A, de modo que el (cuadrado) de la (recta) expresable A, aplicado a la apótoma BΔ produce la anchura KΘ.



Digo que ΚΘ es una binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de ΒΔ y guardan la misma razón, y además ΚΘ es del mismo orden que ΒΔ.

Pues sea ΔΓ la (recta) adjunta a ΒΔ; entonces ΒΓ, ΓΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y sea el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, Η igual al (cuadrado) de Α. Pero el (cuadrado) de Α es expresable; entonces el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, Η es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΒΓ; luego Η es expresable y conmensurable en longitud con ΒΓ [X 20]. Pues bien, como el (rectángulo comprendido) por ΒΓ, Η es igual al (rectángulo comprendido) por ΒΔ, ΚΘ, entonces, proporcionalmente, como ΓΒ es a ΒΔ, así ΚΘ a Η [VI 16]. Pero ΒΓ es mayor que ΒΔ, entonces ΚΘ es mayor que Η [VI 16 y V 14]. Hágase ΚΕ igual a Η; entonces ΚΕ es conmensurable en longitud con ΒΓ. Ahora bien, dado que como ΓΒ es a ΒΔ, así ΘΚ a ΚΕ, entonces, por conversión, como ΒΓ es a ΓΔ, así ΚΘ a ΘΕ [V 19 Por.]. Hágase de forma que como ΚΘ es a ΘΕ, así ΘΖ a ΖΕ; entonces la (recta) restante ΚΖ es a ΖΘ como ΚΘ es a ΘΕ, es decir, como ΒΓ a ΓΔ [V 19]. Pero ΒΓ, ΓΔ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Luego también ΚΖ, ΖΘ son conmensurables sólo en cuadrado. Y dado que, como ΚΘ es a ΘΕ, ΚΖ es a ΖΘ, mientras que, como ΚΘ es a ΘΕ, ΘΖ a ΖΕ, entonces, como ΚΖ es a ΖΘ, ΘΖ a ΖΕ [V 11]; de modo que también como la primera es a la tercera, el (cuadrado) de la primera es al (cuadrado) de la segunda [V Def. 9];

luego también, como KZ es a ZE, así el (cuadrado) de KZ al (cuadrado) de ZΘ. Pero el (cuadrado) de KZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZΘ, porque KZ, ZΘ son conmensurables en cuadrado; entonces KZ es también conmensurable en longitud con ZE [X 11]; de modo que KZ es también conmensurable en longitud con KE [X 15]. Pero KE es expresable y conmensurable en longitud con BΓ; entonces, KZ también será expresable y conmensurable en longitud con BΓ [X 12]. Y puesto que, como BΓ es a ΓΔ, así KZ a ZΘ, por alternancia, como BΓ es a KZ, así ΔΓ a ZΘ [V 16]. Pero BΓ es conmensurable con KZ; así pues, ZΘ es conmensurable en longitud con ΓΔ [X 11]. Pero BΓ, ΓΔ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego KZ, ZΘ son (rectas) expresables [X Def. 3] conmensurables sólo en cuadrado; por tanto KΘ es binomial.

Pues bien, si el cuadrado de BΓ es mayor que el de ΓΔ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (BΓ), también el (cuadrado) de KZ será mayor que el de ZΘ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (KZ) [X 14]. Y si BΓ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también KZ lo será, pero si ΓΔ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, también ZΘ (lo será), y si ninguna de las (rectas) BΓ, ΓΔ lo es, ninguna de las (rectas) KZ, ZΘ (lo será).

Ahora bien, si el cuadrado de BΓ es mayor que el de ΓΔ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BΓ), el (cuadrado) de KZ será también mayor que el de ZΘ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (KZ) [X 14]. Y si BΓ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, KZ también (lo será), pero si lo es ΓΔ, ZΘ también (lo será), y si ninguna de las (rectas) BΓ, ΓΔ (lo es), ninguna de las (rectas) KZ, ZΘ lo será.

Por consiguiente, KΘ es una binomial cuyos términos KZ, ZΘ son conmensurables con los términos BΓ, ΓΔ de la apótoma, y guardan la misma razón y además KΘ es del mismo orden que BΓ. Q. E. D.

Proposición 114

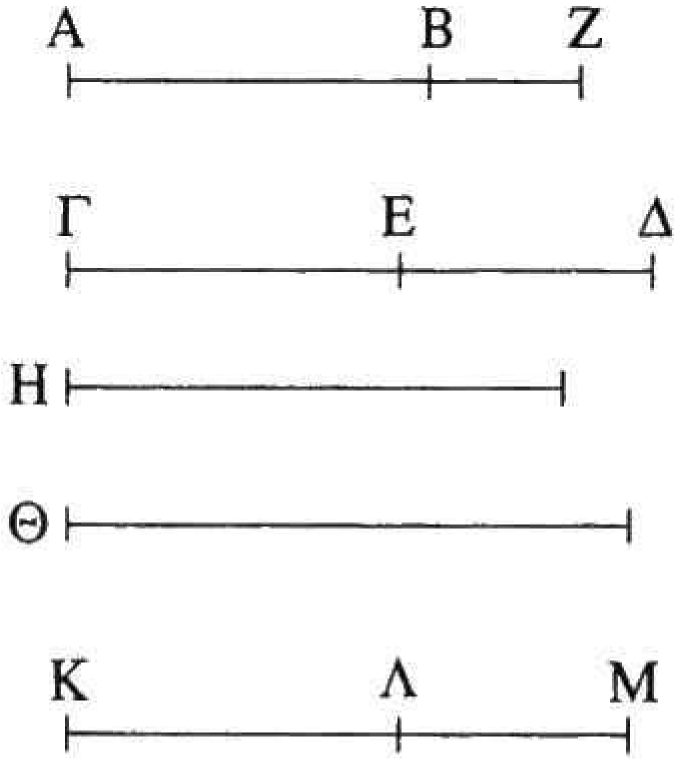
Si un área está comprendida por una apótoma y una binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de la apótoma y guardan la misma razón, el lado del cuadrado equivalente al área es expresable.

Sea, pues, comprendida el área AB, ΓΔ por la apótoma AB y la binomial ΓΔ cuyo término mayor sea ΓE, y sean los términos de la binomial ΓE, EΔ conmensurables con los términos de la apótoma AZ, ZB y guarden la misma razón, y sea H el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por AB, ΓΔ.

Digo que H es expresable.

Pues póngase la (recta) expresable Θ, y aplíquese a ΓΔ un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de Θ produciendo la anchura KΛ; entonces KΛ es una apótoma; sean sus términos KM, MΛ conmensurables con los términos ΓE, EΔ de la binomial y guarden la misma razón [X 112]. Pero ΓE, EΔ son también conmensurables con AZ, ZB y guardan la misma razón. Entonces, como AZ es a ZB, así KM a MΛ. Luego, por alternancia, como

AZ es a KM, así BZ a ΛM; por tanto, la (recta) restante AB es a la (recta) restante KΛ como AZ es a KM [V 19].



Pero AZ es conmensurable con KM [X 12]; entonces AB es también conmensurable con KΛ [X 11].

Ahora bien, como AB es a KΛ, así el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB al (rectángulo comprendido) por ΓΔ, KΛ [VI 1]. Luego el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB es conmensurable también con el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, KΛ [X 11].

Pero el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, KΛ es igual al (cuadrado) de Θ; así pues, el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB es conmensurable con el (cuadrado) de Θ. Pero el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB es igual al (cuadrado) de H; entonces el (cuadrado) de H es conmensurable con el (cuadrado) de Θ. Pero el (cuadrado) de Θ es expresable, luego el cuadrado de H es expresable. Por tanto, H es expresable. Y es el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por ΓΔ, AB.

Por consiguiente, si un área está comprendida por una apótoma y una binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de la apótoma y guardan la misma razón, el lado del cuadrado equivalente al área es expresable.

Porisma:

Y por eso también nos queda claro lo siguiente: que es posible que un área expresable esté comprendida por rectas no expresables. Q. E. D.

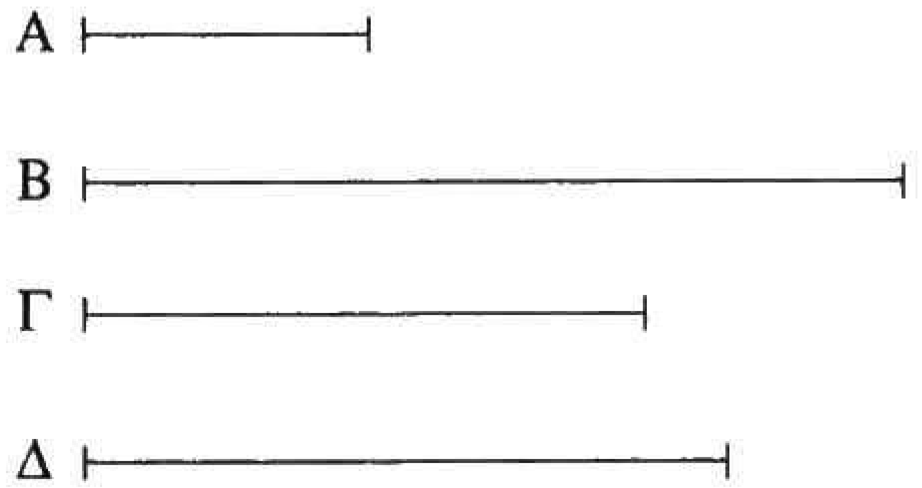
Proposición 115

A partir de una (recta) medial se produce un número infinito de (rectas) no expresables y ninguna de ellas es la misma que ninguna de sus predecesoras.

Sea, pues, A una (recta) medial.

Digo que, a partir de A se produce un número infinito de rectas no expresables y que ninguna de ellas es la misma que una de sus predecesoras.

Pues póngase la (recta) expresable B, y sea el cuadrado de Γ igual al (rectángulo comprendido) por B, A; entonces Γ no es expresable [X Def. 4]; porque un (área) comprendida por una (recta) expresable y una (recta) no expresable es un (área) no expresable [Deduc. de X 20]. Y no es la misma que ninguna de sus predecesoras porque ninguno de los cuadrados de las predecesoras aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una (recta) medial. Sea, a su vez, el (cuadrado) de Δ igual al (rectángulo comprendido) por B, Γ; entonces el (cuadrado) de Δ no es expresable [Deduc. de X 20]. Luego Δ es una (recta) no expresable [X Def. 4]; y no es la misma que ninguna de sus predecesoras, porque ninguno de los cuadrados de las predecesoras aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura Γ. De manera semejante, entonces, avanzando en la serie *ad infinitum* queda claro que, a partir de una (recta) medial se produce un número infinito de (rectas) no expresables y ninguna es la misma que una de sus predecesoras. Q. E.D.]



[1] Traduzco por «conmensurables en cuadrado» la expresión *dynámei sýmmetroi.* El término *dýnamis* corre la misma suerte que otras muchas expresiones matemáticas griegas: además de la riqueza de sentidos con que cuenta en el uso ordinario, adquiere diversos significados específicos en distintos contextos especializados. Su sentido característico en matemáticas suele ser el que corresponde a la operación o resultado de elevar a la segunda potencia, al cuadrado. Este sentido, cuyo paradigma es el cuadrado construido sobre una recta dada, es el pertinente en los *Elementos.* Cuando aquí se habla de magnitudes conmensurables en cuadrado, las razones consideradas median no entre las magnitudes nombradas sino entre las magnitudes que se derivan de ellas por esa operación. Para comparar, *e. g.,* dos líneas «en cuadrado», Euclides considera las razones de los cuadrados construídos sobre las líneas en cuestión.

Por otro lado, según hará notar un porisma de la proposición X, 9 *(infra),* todas las rectas conmensurables en longitud *(mḗkei)* son conmensurables en cuadrado; pero no todas las rectas conmensurables en cuadrado, lo son en longitud. Para señalar este segundo caso, Euclides emplea la expresión «conmensurables sólo en cuadrado *(sýmmetroi dynámei mónon)*». Resultan, en suma, estas relaciones: si las magnitudes consideradas (unas rectas dadas) son conmensurables en longitud, también lo son en cuadrado; por tanto, si son inconmensurables en cuadrado, también lo son en longitud; ahora bien, no valen las respectivas conversas, de modo que pueden ser conmensurables en cuadrado, pero no en longitud, y por ende inconmensurables en longitud, pero no en cuadrado.

[2] Las expresiones «racionalmente expresable» y «no racionalmente expresable» traducen respectivamente *rhētós* y *álogos.* Una versión más literal como «expresable *(rhētós)*» y «sin razón *(álogos)*» no trasluce el papel de estos términos como antónimos en el presente contexto matemático. Por ende parece más indicada una versión del tenor de «con razón expresable» / «sin razón expresable»; las expresiones aquí empleadas son una variante preferible por motivos simplemente estilísticos. Con todo, esta versión es un tanto insólita y desafía los usos y costumbres vigentes en la tradición que los vierte por «racional» e «irracional», sin más. Mi versión responde a estos motivos: (1) Trato de evitar las connotaciones habituales en nuestro par «racional / irracional», que llevan a pensar en números y a dar, subrepticiamente, un sesgo aritmético al libro X. (2) A esta indebida aritmetización se añade la circunstancia de que «racionalmente expresable *(rhētós)*» cobra en Euclides un sentido más amplio que nuestro «racional» y, por correspondencia, el sentido de «no racionalmente expresable *(álogos)*» deviene más restringido que «irracional»: sólo carecen de razón expresable las rectas que resultan inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado con una recta designada —implícitamente por lo regular— como referencia o parámetro de «expresabilidad racional». (3) Aunque no han faltado intentos de reducir el complejo libro X a un lenguaje algebraico más familiar, la interpretación más congruente con el planteamiento de los *Elementos* es la que mantiene su carácter irreduciblemente geométrico. Así que tampoco por esta vía reductiva parece aconsejable la versión tradicional: «racional», «irracional». Sólo cabría, en suma, servirse de estos términos como de una especie de abreviaturas dentro del marco de los supuestos (l)-(3) y sin perder de vista que la matemática griega clásica carece de nuestro concepto de número real, de modo que no comparte nuestro contexto habitual de uso de los términos «racional» e «irracional» en matemáticas.

Este punto guarda relación con el problema general de la interpretación del libro X, que arrastra desde Simon Stevin (1585) el apelativo de «cruz de los matemáticos» —sobre el sentido que puede tener aún esta denominación, cf. «Introducción general» en el primer tomo, *Elementos. Libros I-IV,* págs. 88-89—. Dada la complicada y oscura organización del libro, no faltan propuestas sobre su motivación y su sentido. Por ejemplo, según B. L. VAN DER WAERDEN *(Science Awakening,* Nueva York, 1963, edic. rev.), el libro responde al problema de determinar cuándo la raíz de ciertas líneas irracionales es un irracional del mismo tipo (págs. 168-172), y sigue una línea puramente algebraica de pensamiento (pág. 178). Según I. MUELLER *(Philosophy of Mathematics...., op. cit.* en la «Introducción general», pág. 184), el libro carece de una motivación intuitiva clara y parece dedicado a elaborar una clasificación de líneas irracionales en respuesta al problema de la construcción del icosaedro en XIII, 16. C. M. TAISBAK *(Coloured Quadrangles,* citado en «Introducción general», nota 27, págs. 88-89), el libro X se centra en el estudio de las relaciones entre los lados y diagonales del decágono, el hexágono y el pentágono regulares con el diámetro del círculo circunscrito, conforme a un determinado patrón de conmensurabilidad/inconmensurabilidad. Esta interpretación es sostenida por D. H. FOWLER *(The Mathematics of Plato's Academy,* cit. íbidem; «An Invitation to Read Book X of Euclid's *Elements*», *Historia Mathematica* 19 (1992), 233-264). En una línea similar se mueve la interpretación de W. R. KNORR («La croix des mathématiciens...», cit. íbidem). aunque tiende a marcar el acento sobre el caso del pentágono regular. En todo caso, creo que la lectura geométrica en la que convienen Taisbak, Fowler y Knorr es la que mejor cuadra con el planteamiento del libro y con su lugar de encrucijada en los *Elementos.* Por lo demás, en los trabajos citados hay cuadros y esquemas de las diversas clasificaciones de rectas con o sin razón expresable, que resumen los resultados del libro y que no puedo recoger aquí.

[3] Un área resulta «racionalmente expresable» o «no racionalmente expresable» según sea conmensurable o no con el cuadrado de una recta predeterminada como expresable. La misma condición se extiende bien a sus lados, si el área en cuestión es un cuadrado, o bien a los lados de un cuadrado de área igual, si se trata de otra figura.

Vierto *hai dynámenai* como «las rectas que los producen». *Dynaménē* suele traducirse por «raíz cuadrada», pero esta versión incurre en el sesgo aritmético ya denunciado. Así que prefiero mantener la referencia al lado (base) del cuadrado producido. Sobre la expresión *tetrágōna anagráphousai* («rectas que construyen cuadrados»), cf. nota 61 del libro I en *Elementos. Libros I-IV,* pág. 259.

[4] Este teorema reviste especial importancia aunque apenas preste servicio hasta las proposiciones del libro XII que emplean el llamado «método de exhausción». Su situación aquí puede justificarse como paso previo a X, 2, donde se muestra el procedimiento para determinar si dos magnitudes son conmensurables o inconmensurables. El relieve de X, 1 descansa en su papel como principio básico del método ya mencionado de «exhausción». Se asemeja a la quinta asunción de Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* y recuerda así mismo un lema del propio Arquímedes en *La cuadratura de la parábola.* Reza el lema: «El exceso de la mayor de dos áreas desiguales sobre la menor ⟨es una magnitud que⟩ puede sobrepasar, si es añadida a sí misma (cuantas veces se requiera), cualquier área finita dada». Y a renglón seguido dice Arquímedes que los geómetras anteriores no dejaron de apelar a este lema, pues fue a través de él como establecieron que los círculos guardan entre sí la razón de los cuadrados de sus diámetros (XII 2), las esferas guardan entre sí la razón de los cubos de sus diámetros (XII 18), toda pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma con la misma base y altura (XII 7) y todo cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro con la misma base y altura (XII 10) —cf. *La cuadratura de la parábola,* prefacio a Dositeo, edic. CH. MUGLER, París, 1971; t. II, 165.6-18—. Esa referencia al uso anterior del lema halla confirmación en algunas alusiones de ARISTÓTELES en análogo sentido (*Física,* 266b2, 207b10). Todo ello apunta a Eudoxo: es probable que un supuesto similar a X 1 ya hubiera obrado en algunos de esos resultados de Eudoxo recogidos por Euclides en el libro XII. Pero un supuesto *similar* no es el *mismo* supuesto. La asunción y el lema de Arquímedes, a quien suele suponerse más respetuoso con Eudoxo que con el propio Euclides, hacen referencia a la adición, mientras que Euclides se atiene a la sustracción, en la perspectiva del algoritmo antifairético de sustracción recíproca, y prefiere operar —al menos en principio— en términos de bisecciones. Sobre este algoritmo recuérdense las proposiciones 2, 3 del libro VIII.

[5] X 2 muestra uno de los usos más metódicos —digamos— que operativos del procedimiento antifairético, *i. e.,* su uso como criterio de conmensura-bilidad/inconmensurablidad. Conforme a este criterio, dos magnitudes son conmensurables si y sólo si cabe determinar efectivamente, por el procedimiento antifairético, la existencia de medida común. Por ende, siempre que la serie de sustracciones recíprocas proceda indefinidamente sin llegar a un resultado efectivo, tendremos una señal de que las magnitudes en cuestión son inconmensurables. En otras palabras, la efectividad o la no efectividad del algoritmo antifairético es una condición que determina respectivamente la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad.

[6] X 3 aplica a las magnitudes el procedimiento empleado en VII 2 para los números. Sobre la proyección histórica y las modernas aplicaciones de este al goritmo euclídeo, cf. J. L. CHABERT *et alii, Histoire d'algorithmes,* París, 1993 cap. 4, págs. 129-158.

[7] Esta proposición, al igual que la anterior con VII 2, coincide literalmente con VII 3, sustituyendo número por magnitud.

[8] La prueba descansa, en parte, sobre la noción de proporción prevista para los números y en el supuesto tácito de que los términos que sean proporcionales en el sentido de la def. 20 del libro VII, también lo serán en el sentido generalizado de la def. 5 del libro V. Euclides, después de dar dos caracterizaciones autónomas y separadas de la proporcionalidad, una para las magnitudes en el libro V y otra para los números en el libro VII, viene a suponer que las segundas pueden considerarse un caso particular de las primeras. De una relación similar entre magnitudes y números ya se había hecho eco ARISTÓTELES *(Analíticos Segundos,* 74a17, 75b4-5). Pero esta correspondencia entre las magnitudes conmensurables y los números no deja de resultar ahora un tanto inesperada. Se ha llegado a decir que la falta de una correlación expresa entre unas y otros, antes del libro X, constituye probablemente la mayor laguna de los *Elementos* en cuestión de fundamentos (I. MUELLER, *op. cit.,* pág. 138). SIMSON, por su parte, procura establecer esa correspondencia a partir de una proposición C intercalada en el libro V (*vid.* edic. cit., págs. 122 y 313-314).

[9] *Tò apò tês* A *eutheías,* «la (figura construida) sobre la recta A».

[10] Un escolio a esta proposición (*Schol.* X, núm. 26) afirma que este teorema fue descubierto por Teeteto.

[11] Heiberg atetiza cuatro párrafos situados a continuación del porisma por considerarlos superfluos e impropios del proceder habitual de Euclides. Un resumen del contenido de estos párrafos, no incluidos en el presente texto, puede ser el siguiente:

Tras una especie de prueba o explicación del porisma, se establece y explica que las rectas inconmensurables en longitud no son necesariamente inconmensurables también en cuadrado y que, sin embargo, aquellas rectas que son inconmensurables en cuadrado son siempre inconmensurables en longitud.

[12] Lema sospechoso. HEATH lo atetiza (*edic. cit.,* III, pág. 30). Sin embargo Heiberg lo mantiene pese a sus reservas, algunas de las cuales hacen referencia a la proposición siguiente. Cf. nota 13.

[13] Existen serias objeciones para considerar genuino este teorema:

En primer lugar, depende de la siguiente proposición X 11 para concluir que el cuadrado de A es inconmensurable con el cuadrado de E; de modo que incurriría en la pretensión irregular de probar un teorema sobre la base de demostraciones posteriores.

Además la expresión *emáthomen gár* «pues lo hemos aprendido» no es propia de Euclides y revelaría la mano de un estudiante (aunque esta expresión se halla en la *Sectio Canonis* euclídea empleada con referencia a los *Elementos*).

Por último, el manuscrito P, en su primera mano, tiene el número 10 al principio de X 11, de donde parece desprenderse que inicialmente X 10 no tenía número.

Por todo ello, Heath considera espurios tanto el lema anterior como la proposición X 10. Heiberg, si bien no lo atetiza, declara en una nota a su traducción (edic. cit., III, pág. 35) que resulta sospechoso y que a duras penas se puede considerar de Euclides.

[14] El lema proporciona el método de hallar una recta *c* igual a $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ donde *a* y *b* son rectas dadas de las que la mayor es *a*.

[15] En aras de la claridad sustituyo por «primera» o «tercera» la palabra *heauté* del griego cuya traducción literal se prestaría a equívocos.

[16] Como anota HEATH (*edic. cit.,* III, pág. 41), si *a* es la recta dada y *x* el lado del cuadrado en el que el rectángulo aplicado es deficiente, el rectángulo es igual a ax-x^2, igual a su vez a $x\ (a$-$x)$. El rectángulo puede formularse como xy, donde $x+y=a$. Dada el área $x\ (a$-$x)$ ó xy (donde $x+y=a$), dos aplicaciones diferentes darán rectángulos iguales a esa área; siendo los lados del defecto x ó a-x (x ó y) respectivamente; pero el segundo modo de expresión muestra que los rectángulos no difieren en la forma sino en la posición.

En lo que se refiere a la noción de áreas deficientes cf. nota 59 de *Elementos I-IV,* pág. 255.

[17] *Hē* ΒΓ *ára tês* Α *meídson dýnatai tê* ΔΖ. Se utiliza *dýnatai* aquí en el mismo sentido técnico que *dynámei* «en cuadrado» (cf. MUGLER, *Dictionnaire...,* págs. 148 ss.) o *hē dynaménē* «el lado del cuadrado equivalente a». Este verbo se utiliza en contextos matemáticos para significar la operación de elevar al cuadrado.

[18] A partir de aquí traduzco *rhētós* como «expresable» para abreviar la expresión «racionalmente expresable» que complicaría en exceso la lectura del texto en castellano.

[19] HEATH (*op. cit.,* III, pág. 47) suprime el lema por considerarlo superfluo y prolijo en exceso.

[20] HEATH (*op. cit.,* III, pág. 48) encuentra dificultades para admitir estas palabras pues sólo hay dos formas de conmensurabilidad: conmensurabilidad en longitud, y por tanto en cuadrado, o sólo en cuadrado, y cada una excluye la otra. Por otra parte *proeirēménōn* «antedichas» parece refefirse al lema anterior que considera sospechoso. Por todo ello cree que la mejor solución sería suprimir tanto el lema como las palabras citadas del enunciado de X 19.

[21] Cf. notas 2 y 3.

[22] La recta medial recibe tal nombre por tratarse de la media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado. Se demuestra aquí que el rectángulo comprendido por ellas no es racionalmente expresable. En el porisma a X 23 esta área se denomina «medial».

[23] Si *a, b* son dos rectas, $a : b :: a^2 : ab$.

[24] En el porisma tenemos la primera mención de un área medial. Se trata de un área igual al cuadrado de una recta medial. Euclides no da una definición explícita.

Por otra parte HEATH atetiza el último párrafo del porisma (cf. *op. cit.,* III, pág. 54 y nota 25).

[25] El enunciado presenta la misma dificultad que X 19. Cf. nota 20. Heath decide suprimir las palabras «según alguna de las formas antedichas» así como la parte del porisma anterior a la que debían referirse estas palabras.

[26] Al final de la proposición suplo entre paréntesis las palabras (el cuadrado de Γ es mayor que el cuadrado de Δ) sin las que el texto resultaría difícil de entender. Sigo la versión latina de Heiberg.

[27] Como en la proposición anterior sigo la versión latina de Heiberg entre paréntesis.

[28] A partir de aquí comienza la denominación, clasificación y descripción de propiedades de tipos de rectas sin razón expresable producidas por la suma o diferencia de dos rectas expresables inconmensurables.

Según FOWLER (art. cit.) el libro X sistematiza pequeños grupos de entre la infinidad de rectas sin razón expresable posibles. Taisbak, por su parte, relaciona la denominación, selección y clasificación de estos tipos de rectas con la motivación subyacente, a su juicio, en el libro X de los *Elementos,* a saber: dar los pasos previos necesarios para explicar el lado del pentágono regular y sus relaciones con el diámetro del círculo y los lados del hexágono y decágono regulares que serán expuestas en el libro XIII. Según esta teoría, el término «binomial» respondería a que el diámetro del círculo es la suma de dos lados de cuadrados que no pueden reducirse a uno pero de los que puede hablarse por separado *ek dýo onomátōn,* mientras que el lado del decágono es la diferencia (apótoma) entre los mismos lados de cuadrados.

Las razones de estos nombres así como de otras denominaciones aparentemente más oscuras de tipos de rectas «no expresables» que van surgiendo a lo largo del libro X («mayor», «menor», etc.) probablemente se olvidaron, pero los nombres se mantuvieron junto con las definiciones de sus características. No es de extrañar que los griegos, que están fijando una terminología específica en sus usos de *lógos, dýnamis, rhētós,* etc., especialicen términos como *meídsōn* o *elássōn* para referirse a las rectas que se dividen de la misma manera que la diagonal y el lado del pentágono regular, las rectas «mayor» y «menor» respectivamente.

[29] Aparte de los dos bloques de seis tipos de rectas cada uno, que se agrupan bajo las denominaciones «binomial» y «apótoma» y que serán definidos en las segundas y terceras definiciones respectivamente, aparece en el libro X otra serie de rectas de las que no hay definiciones explícitas. Es el caso de la «primera bimedial» y la «segunda bimedial».

Como explica FOWLER (art. cit., pág. 259) se trata de una clasificación general que abarca trece tipos de rectas, entre las que se contaría la primera bimedial, que no se verá expuesta con claridad hasta el final del libro (X 111). En esta clasificación general no se definen expresamente las rectas que la componen. Hay además una subclasificación de dos bloques de rectas «binomiales» y «apótomas» en seis tipos diferentes cada una que están explícitamente definidas bajo los rótulos «Segundas definiciones» y «Terceras definiciones» respectivamente. Según Fowler, esta subclasificación responde al mecanismo interno al libro X de hallar rectas sin razón expresable.

[30] La «mayor» es otra de las rectas que pertenecen a la clasificación que hemos llamado general y que no se definen expresamente. Según Taisbak, su nombre obedece probablemente a que corresponde a la recta «mayor» del pentágono regular que es la diagonal.

[31] El «lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial» es la sexta recta sin razón expresable que aparece en la clasificación general.

[32] En esta proposición se nos muestra la séptima recta sin razón expresable de la clasificación general: «lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales».

[33] En el lema aparece la expresión *poiousôn tà prokeímena eídē* «dando lugar a los tipos propuestos». La palabra *eídē,* por contar con un campo semántico tan amplio, resulta sumamente ambigua, la traduzco por «tipos» (de rectas sin razón expresable). La expresión en su conjunto también podría significar aquí «cumpliendo las condiciones propuestas».

[34] Tras los siete primeros tipos de rectas (medial, binomial, primera bimedial, segunda bimedial, mayor, lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial y lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales) y sus propiedades, Euclides presenta en estas Segundas Definiciones una subclasificación de las binomiales en seis tipos diferentes. En las proposiciones 48-53 enseña la forma de hallar cada una de ellas.

[35] Un rectángulo es media proporcional de los cuadrados de sus lados.

[36] Suplo entre paréntesis las aclaraciones «(es decir: BA, AH y BA, HE) son (pares de)...» que no aparecen en el texto griego. Una traducción literal podría dar la impresión de que dos cualesquiera de las tres rectas citadas son conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, AH, HE son, de hecho, conmensurables en longitud y únicamente las del otro par son conmensurables sólo en cuadrado.

[37] Heiberg atetiza este lema y considera que es poco verosímil que lo haya intercalado el propio Euclides pues lo ha utilizado tácitamente en X 44.

[38] Euclides continúa ahora, dentro de la clasificación general, con aquellas rectas que son producidas por la diferencia de dos rectas expresables inconmensurables.

Taisbak relaciona el nombre de «apótoma» con el lado del decágono regular, que resulta de la diferencia de los mismos lados de cuadrados que, sumados, producen el diámetro del círculo. Cf. nota 28.

[39] Hasta las últimas líneas de la proposición no se prueba que ΛO, ON son inconmensurables en longitud. Lo que debía haberse probado en el pasaje anterior es que los cuadrados de ΛO, ON son conmensurables, es decir, que ΛO, ON son «conmensurables en cuadrado» no «sólo en cuadrado» como dice el texto. Teón parece haber reparado en este punto al añadir «y conmensurables entre sí» detrás de «medial», pero esto no soluciona el problema. El manuscrito V presenta la palabra *mónon* «sólo» borrada.

[40] Heiberg atetiza estas palabras que Heath mantiene en su traducción entre corchetes.

[41] Se entiende: «como una de las magnitudes antecedentes es a una de las consecuentes, así todas las antecedentes a todas las consecuentes».

[42] Heiberg considera esta proposición y las siguientes hasta el final del libro X una interpolación anterior a Teón.

Estas proposiciones (112-115) aparecen después de la recapitulación de los trece tipos de rectas no expresables de la clasificación general que podría ser la conclusión del libro. No tienen relación con el resto del tratamiento de los trece tipos de rectas sin razón expresable y no se usan en los libros posteriores sobre geometría de sólidos.

112-115 parecen ser el germen de un nuevo estudio sobre las rectas sin razón expresable. 115 en particular amplía el número de sus diferentes tipos. Tienen visos de ser un conjunto de teoremas antiguos que Heiberg piensa que pueden atribuirse a Apolonio, aunque no sean genuinos. Heath considera, sin embargo, que 112-114 tienen relación con las precedentes: X 111 muestra que una recta binomial no puede ser también una apótoma, mientras que X 112-114 ponen de manifiesto cómo cada una de ellas se puede usar para convertir la otra en expresable.

LIBRO UNDÉCIMO

DEFINICIONES

1. Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad [43].
2. Y el extremo de un sólido es una superficie.
3. Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano[44].
4. Un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la sección común de los (dos) planos forman ángulos rectos con el plano restante.
5. Cuando desde el extremo de una recta elevado sobre un plano se traza una perpendicular al plano y se traza otra recta desde el punto que resulta hasta el extremo (que está) en el plano de la (primera) recta, el ángulo comprendido por la recta así trazada y la (que está) sobre el plano es la inclinación de la recta con respecto al plano[45].
6. La inclinación de un plano con respecto a un plano es el ángulo agudo comprendido por las (rectas) trazadas a un mismo punto formando ángulos rectos con la sección común en cada uno de los planos[46].
7. Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro se inclina sobre otro, cuando dichos ángulos de inclinación son iguales entre sí.
8. Planos paralelos son los no concurrentes[47].
9. Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número.
10. Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño[48].
11. Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie con respecto a todas las líneas.

    O de otra forma: un ángulo sólido es el comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.
12. Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.

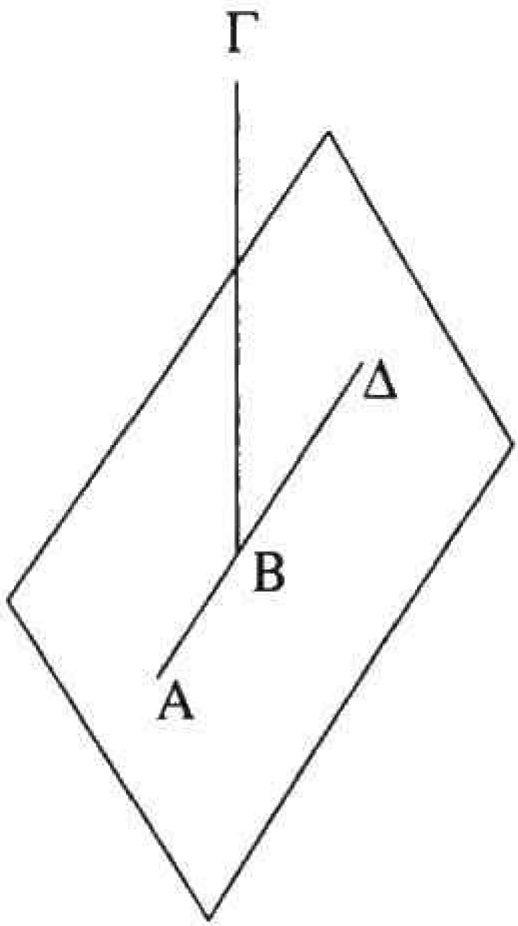
13. Un prisma es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás son paralelogramos.
14. Cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es una esfera[49].
15. Y el eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la que gira el semicírculo.
16. Y el centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo.
17. Y diámetro de la esfera es cualquier recta trazada a través del centro y limitada en ambas direcciones por la superficie de la esfera.
18. Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un cono. Y si la recta que permanece fija es igual a la restante del ángulo recto, el cono será rectángulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.
19. Y el eje del cono es la recta que permanece fija en torno a la que gira el triángulo.
20. Y la base, el círculo descrito por la recta que gira.
21. Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un cilindro.
22. Y el eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.
23. Y las bases son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giran.
24. Conos y cilindros semejantes son aquellos cuyos ejes y diámetros de las bases son proporcionales.
25. Un cubo es la figura sólida comprendida por seis cuadrados iguales.
26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.
27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.
28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos[50].

Proposición 1

No cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en un plano más elevado.

Pues, si fuera posible, esté la parte ΑΒ de la línea recta ΑΒΓ en el plano de referencia y la otra parte ΒΓ en un plano más elevado.

Entonces habrá en el plano de referencia una recta que continúe a AB; sea BΔ, entonces AB es un segmento común de las dos rectas ABΓ, ABΔ; lo cual es imposible teniendo en cuenta que, si describiéramos un círculo con el centro B y la distancia AB, los diámetros cortarían circunferencias desiguales del círculo.



Por consiguiente, no cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en el plano más elevado. Q. E. D.[51].

Proposición 2

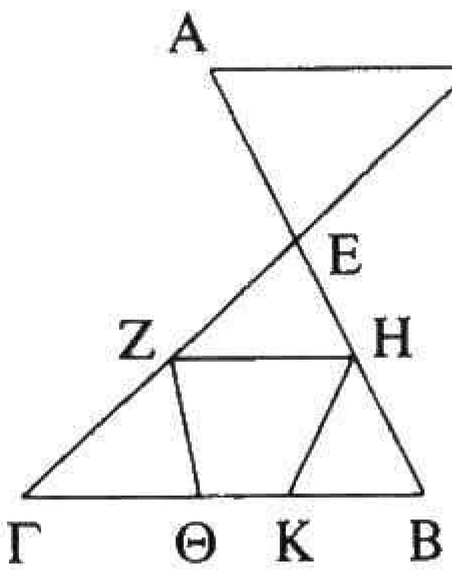
Si dos rectas se cortan una a otra están en un plano, y todo triángulo está en un plano.

Córtense, pues, las dos rectas AB, ΓΔ en el punto E.

Digo que AB, ΓΔ están en un plano y todo triángulo está en un plano.

Pues tómense al azar los puntos Z, H en EΓ, EB y trácense ΓB, ZH, y trácense entre ellas ZΘ, HK.

Digo en primer lugar que el triángulo EΓB está en un plano. Pues si una parte del triángulo EΓB, sea ZΘΓ o sea HBK, está en el plano de referencia y la (parte) restante en otro (plano), una parte de una de las rectas EΓ, EB estará también en el plano de referencia y otra (parte) en otro. Pero si la parte ZΓBH del triángulo EΓB está en el (plano) de referencia y la restante en otro, una parte de ambas rectas EΓ, EB estará también en el plano de referencia y otra (parte) en otro; lo que precisamente se ha demostrado que es absurdo [XI 1]. Por tanto, el triángulo EΓB está en un plano. Pero en el (plano) en que está el triángulo EΓB, en ese está también cada una de las rectas EΓ, EB; y en el plano en que está cada una de las rectas EΓ, EB, en ese están también AB, ΓΔ [XI 1].



Por consiguiente, las rectas AB, ΓΔ están en un plano y todo triángulo está en un plano. Q. E. D.[52].

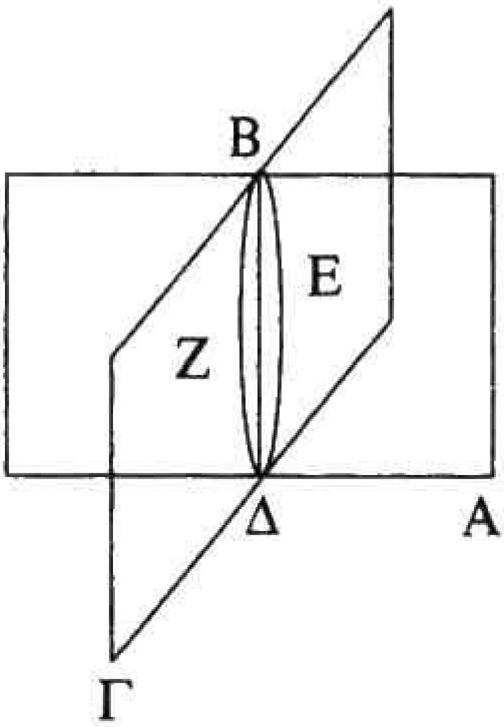
Proposición 3

Si dos planos se cortan uno a otro su sección común es una recta.

Córtense, pues, los dos planos AB, BΓ y sea la línea ΔB su sección común.

Digo que la línea ΔB es una recta.

Pues, si no, trácese de Δ a B en el plano AB, la recta ΔEB, y en el plano BΓ la recta ΔZB.



Entonces las dos rectas ΔEB, ΔZB tendrán los mismos extremos y evidentemente encerrarán un área; lo cual es absurdo. Entonces, ΔEB, ΔZB no son rectas. De manera semejante demostraríamos que no habrá ninguna otra (recta) trazada de Δ a B excepto ΔB, la sección común de los planos AB, BΓ.

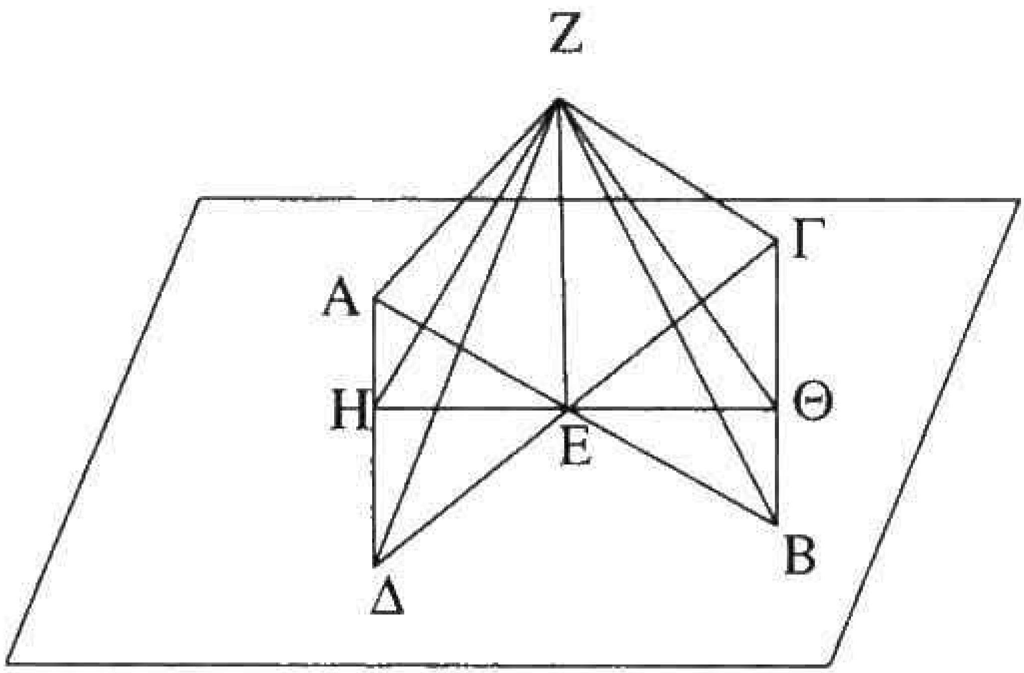
Por consiguiente, si dos planos se cortan uno a otro, su sección común es una recta. Q. E. D.[53].

Proposición 4

Si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan una a otra en su sección común, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas.

Levántese, pues, una recta EZ formando ángulos rectos a partir del punto E con dos rectas AB, ΓΔ que se cortan en el punto E.

Digo que EZ forma también ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de AB, ΓΔ.



Pues tómense las (rectas) AE, EB, ΓE, EΔ iguales entre sí y trácese una recta al azar, HEΘ, por el punto E, y trácense AΔ, ΓB, y además, desde un punto al azar, Z, (de la recta EZ), trácense ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ, ZB. Ahora bien, como las dos (rectas) AE, EΔ son iguales a las dos (rectas) ΓE, EB y comprenden ángulos iguales [I 15], entonces la base AΔ es igual a la base ΓB, y el triángulo AEΔ será igual al triángulo ΓEB [I 4]; de modo que el ángulo ΔAE es igual al ángulo EBΓ. Pero el ángulo AEH es también igual al (ángulo) BEΘ [I 15]. Así pues AHE, BEΘ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado, el que corresponde a los ángulos iguales, esto es: el (lado) AE al (lado) EB; luego tendrá también los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Por tanto, HE es igual a EΘ y AH a BΘ. Y como AE es igual a EB, mientras que ZE es común y forma ángulos rectos, entonces, la base ZA es igual a la base ZB [I 4]. Por lo mismo, ZΓ también es igual a ZΔ. Ahora bien, como AΔ es igual a ΓB, y ZA es igual a ZB, entonces, los dos (lados) ZA, AΔ son iguales respectivamente a los dos (lados) ZB, BΓ; pero se ha demostrado que también la base ZΔ es igual a la base ZΓ; luego el ángulo ZAΔ es igual al ángulo ZBΓ [I 8]. Y puesto que se ha demostrado que AH es a su vez igual a BΘ, mientras que ZA es también igual a ZB, entonces los dos (lados) ZA, AH son iguales a los dos (lados) ZB, BΘ. Y se ha demostrado que el (ángulo) ZAH es también igual al (ángulo) ZBΘ; así pues, la base ZH es igual a la base ZΘ [I 4]. Ahora bien, puesto que se ha demostrado que HE es a su vez igual a EΘ y EZ es común, entonces los dos (lados) HE, EZ son iguales a los dos (lados) ΘE, EZ; y la base ZH es igual a la base ZΘ; entonces el ángulo HEZ es igual al ángulo ΘEZ [I 8]. Luego cada uno de los ángulos HEZ, ΘEZ es recto. Por tanto, ZE forma ángulos rectos con HΘ trazada al azar por el punto E.

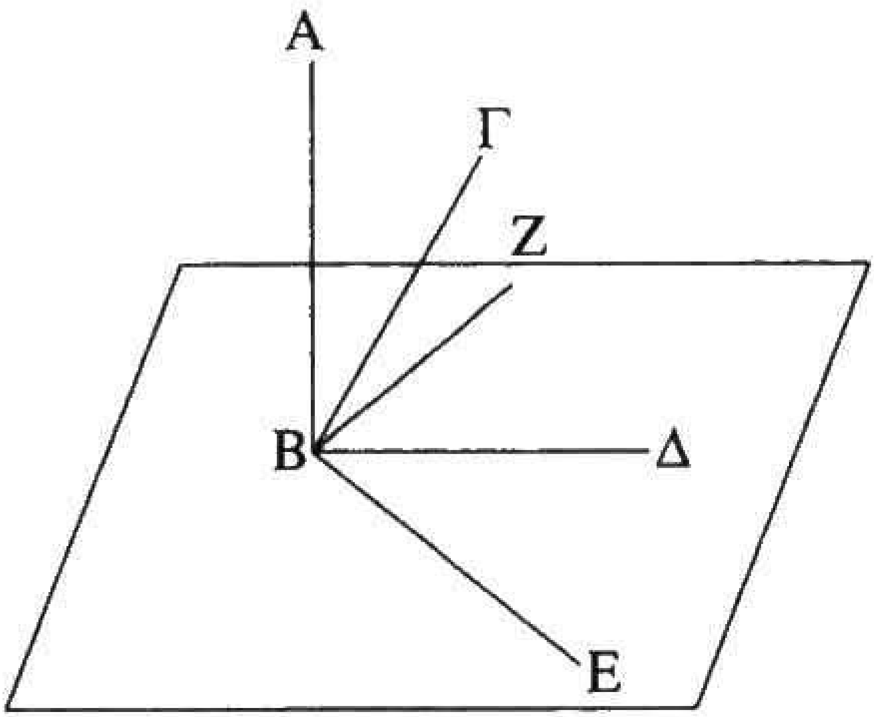
De manera semejante demostraríamos que ZE forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano de referencia. Pero una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el mismo plano [XI Def. 3]. Luego ZE forma ángulos rectos con el plano de referencia. Y el plano de referencia es el (que pasa) a través de las (rectas) AB, ΓΔ. Por tanto ZE forma ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de las (rectas) AB, ΓΔ.

Por consiguiente, si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan, en su sección común, formará también ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de ellas. Q. E. D.

Proposición 5

Si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan, en su sección común, las tres rectas están en un plano.

Levántese, pues, una recta AB formando ángulos rectos con tres rectas BΓ, BΔ, BE, en su punto de contacto, B.



Digo que BΓ, BΔ, BE están en un plano.

Pues, supongamos que no, y si fuera posible, estén BΔ, BE en el plano de referencia y BΓ en uno más elevado, prolónguese el plano que pasa a través de AB, BΓ; entonces producirá una recta como sección común en el plano de referencia [XI 3]. Produzca la (recta) BZ. Así pues, las tres rectas AB, BΓ, BZ están en un plano, el trazado a través de las (rectas) AB, BΓ. Y puesto que AB forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) BΔ, BE, entonces AB es ortogonal también al plano que pasa a través de BΔ, BE [XI 4]. Y el plano (que pasa) a través de BΔ, BE es el de referencia; luego AB es ortogonal al plano de referencia. De modo que AB hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero BZ la toca y está en el plano de referencia; entonces el ángulo ABZ es recto. Y se ha supuesto que el ángulo ABΓ también es recto; luego el ángulo ABZ es igual al ángulo ABΓ. Y están en un plano: lo cual es imposible. Luego la recta BΓ no está en un plano más elevado; por tanto, las tres rectas BΓ, BΔ, BE están en un plano.

Por consiguiente, si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan, en su punto de contacto, las tres rectas están en un plano. Q. E. D.

Proposición 6

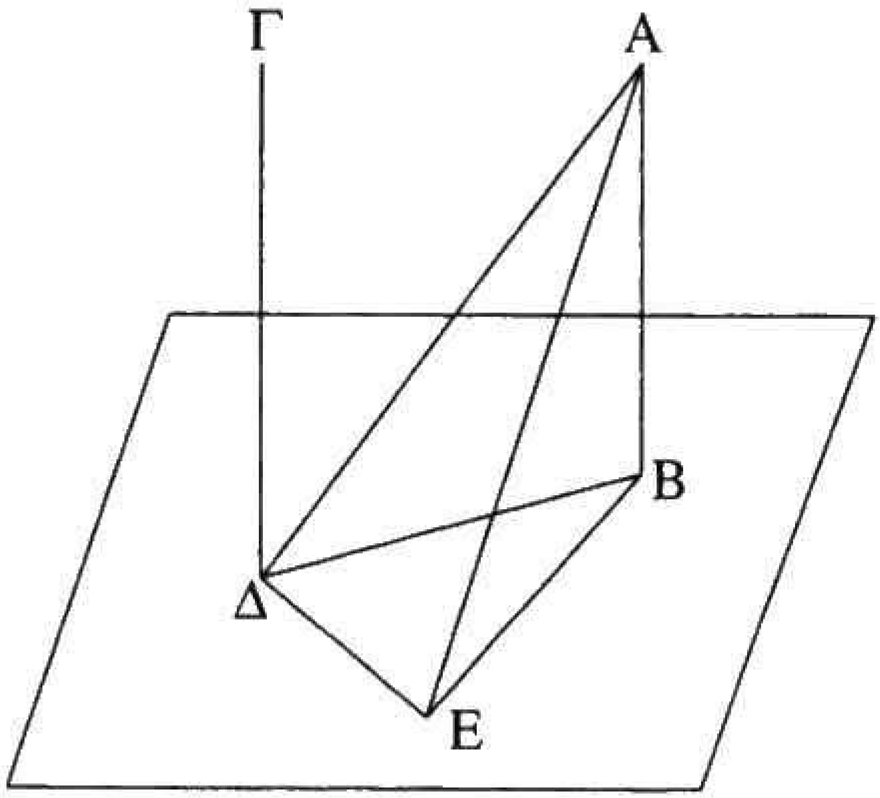
Si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas.

Formen, pues, las dos rectas AB, ΓΔ ángulos rectos con el plano de referencia.

Digo que AB es paralela a ΓΔ.

Pues únanse con el plano de referencia en los puntos B, Δ y trácese la recta BΔ, y trácese ΔE formando ángulos rectos con BΔ en el plano de referencia, y hágase ΔE igual a AB, y trácense BE, AE, AΔ.

Ahora bien, como AB es ortogonal al plano de referencia, hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas BΔ, BE, que están en el plano de referencia, toca a AB; entonces cada uno de los ángulos ABΔ, ABE es recto. Por lo mismo, cada uno de los (ángulos) ΓΔB, ΓΔE también es recto. Y como AB es igual a ΔE y BΔ es común, entonces los dos (lados) AB, BΔ son iguales a los dos (lados) EΔ, ΔB; y comprenden ángulos rectos; luego la base AΔ es igual a la base BE [I 4]. Ahora bien, como AB es igual a ΔE, mientras que AΔ es también igual a BE, entonces los dos (lados) AB, BE son iguales a los dos (lados) EΔ, ΔA; y AE es su base común; luego el ángulo ABE es igual al ángulo EΔA [I 8]. Pero el (ángulo) ABE es recto; entonces el (ángulo) EΔA es también recto; luego EΔ forma ángulo recto con ΔA. Pero forma también ángulos rectos con cada una de las (rectas) BΔ, ΔΓ. Entonces EΔ se ha levantado formando ángulos rectos con las tres rectas BΔ, ΔA, ΔΓ, en su punto de contacto; luego las tres rectas BΔ, ΔA, ΔΓ están en un plano [XI 5]. Pero en el plano en que están ΔB, ΔA, en ése está también AB: porque todo triángulo está en un plano [XI 2]; entonces las rectas AB, BΔ, ΔΓ están en un plano. Ahora bien, cada uno de los ángulos ABΔ, BΔΓ es recto; por tanto, AB es paralela a ΓΔ [I 28].

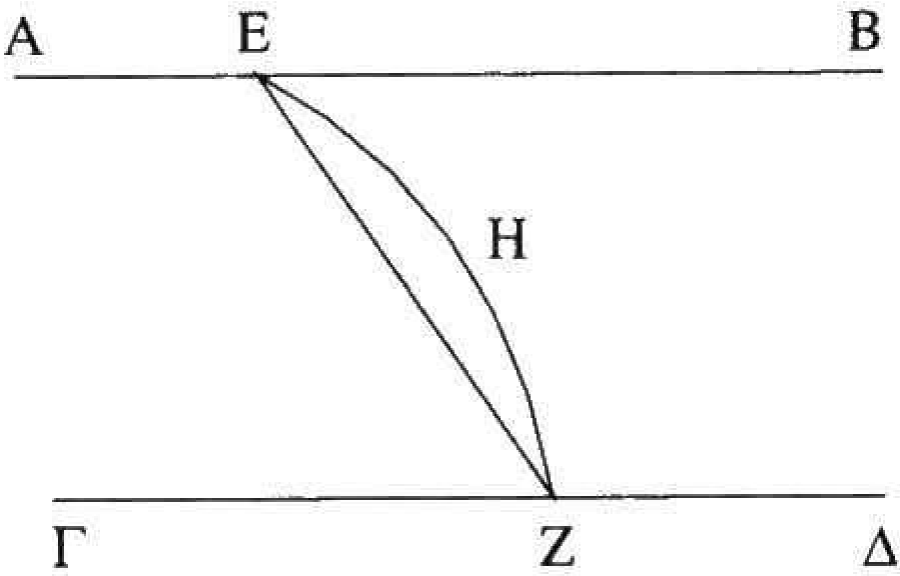


Por consiguiente, si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas. Q. E. D.

Proposición 7

Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas.

Sean AB, ΓΔ dos rectas paralelas y tómense al azar en cada una de ellas los puntos E, Z respectivamente.



Digo que la recta que une los puntos E, Z está en el mismo plano que las paralelas.

Pues supongamos que no, y si fuera posible, esté en un plano más elevado como EHZ, y trácese un plano que pase a través de EHZ, entonces producirá una recta como sección en el plano de referencia [XI 3]. Prodúzcala como la (recta) EZ; entonces las dos rectas EHZ, EZ encerrarán un espacio; lo cual es imposible; luego la recta trazada de E a Z no está en un plano más elevado; por tanto, la recta trazada de E a Z está en el plano que pasa a través de las paralelas AB, ΓΔ.

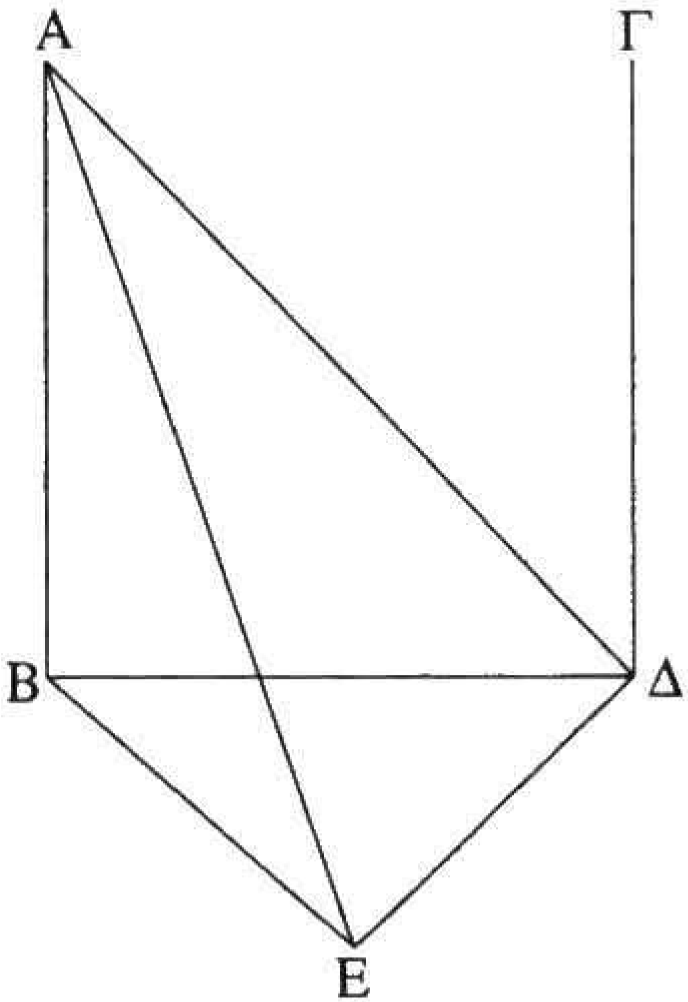
Por consiguiente, si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas. Q. E. D.

Proposición 8

Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Sean AB, ΓΔ dos rectas paralelas y una de ellas, AB, forme ángulos rectos con el plano de referencia.

Digo que la restante, ΓΔ, formará también ángulos rectos con el mismo plano.



Pues únanse AB, ΓΔ con el plano de referencia en los puntos B, Δ, y trácese BΔ; entonces AB, ΓΔ, BΔ están en un plano [XI 7]. Trácese ΔE formando ángulos rectos con BΔ en el plano de referencia y hágase ΔE igual a AB, y trácense BE, AE, AΔ. Y puesto que AB es ortogonal al plano de referencia, entonces AB forma ángulos rectos también con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; luego cada uno de los ángulos ABΔ, ABE es recto. Y puesto que la recta BΔ ha incidido sobre las paralelas AB, ΓΔ, entonces los ángulos ABΔ, ΓΔB son iguales a dos rectos [I 29]. Pero el ángulo ABΔ es recto; entonces el ángulo ΓΔB es también recto; luego ΓΔ forma ángulos rectos con BΔ. Y como AB es igual a ΔE, y BΔ es común, entonces los dos lados AB, BΔ son iguales a los dos (lados) EΔ, ΔB; y el ángulo ABΔ es igual al ángulo EΔB: porque cada uno de ellos es recto; luego la base AΔ es igual a la base BE. Y como AB es igual a ΔE, y BE a AΔ, entonces los dos (lados) AB, BE son iguales respectivamente a los dos (lados) EΔ, ΔA. Y AE es su base común; luego el ángulo ABE es igual al ángulo EΔA. Pero el ángulo ABE es recto; entonces el ángulo EΔA es también recto; así pues, EΔ forma ángulos rectos con AΔ. Pero forma ángulos rectos también con ΔB; luego EΔ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de BΔ, ΔA [XI 4]. Entonces EΔ producirá ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano BΔA. Pero ΔΓ está en el plano que pasa a través de BΔA, teniendo en cuenta que

AB, BΔ están en el plano que pasa a través de BΔA [XI 2], y ΔΓ está también en el plano en el que están AB, BΔ. Entonces EΔ forma ángulos rectos con ΔΓ; de modo que ΓΔ también forma ángulos rectos con ΔE. Pero ΓΔ forma también ángulos rectos con BΔ. Luego ΓΔ está puesta formando ángulos rectos desde el punto de sección, Δ, con las dos rectas ΔE, ΔB que se cortan entre sí; de modo que ΓΔ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΔE, ΔB [XI 4]. Pero el plano que pasa a través de ΔE, ΔB es el de referencia; luego ΓΔ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano. Q. E. D.

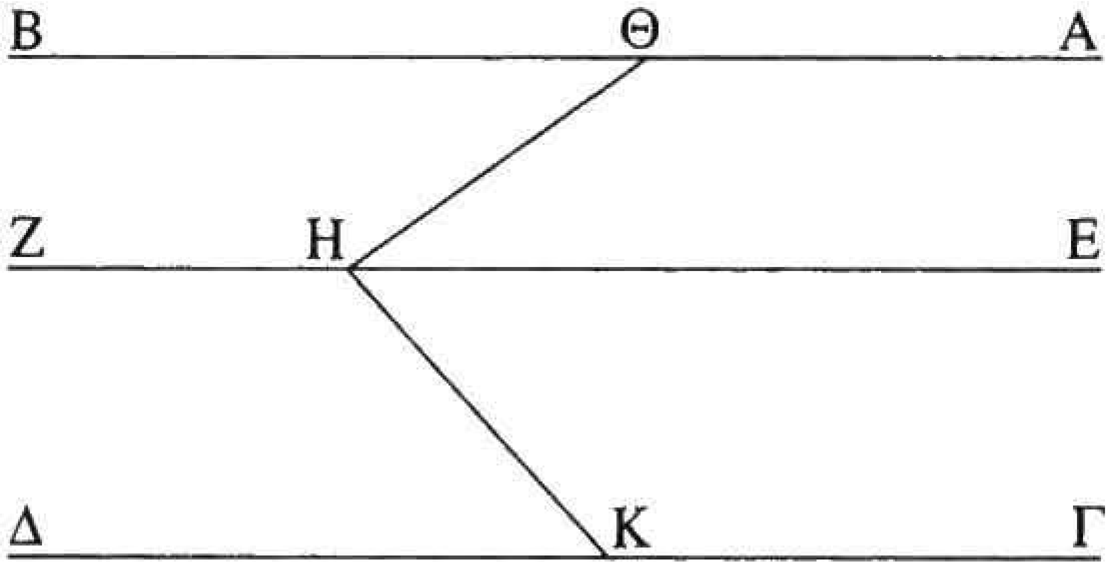
Proposición 9

Las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí.

Sean, pues, cada una de las rectas AB, ΓΔ paralelas a EZ, sin estar en el mismo plano que ella.

Digo que AB es paralela a ΓΔ.

Pues tómese al azar el punto H en la recta EZ, y trácese desde él la (recta) HΘ formando ángulos rectos con EZ en el plano que pasa a través de EZ, AB y trácese HK formando a su vez ángulos rectos con EZ en el plano que pasa a través de ZE, ΓΔ. Ahora bien, como EZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) HΘ, HK, entonces EZ forma ángulos rectos también con el plano que pasa a través de HΘ, HK [XI 4]. Y EZ es paralela a AB, luego también AB forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK [XI 8]. Por lo mismo ΓΔ también forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK; entonces cada una de las (rectas) AB, ΓΔ forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK. Pero si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas son paralelas [XI 6].



Por consiguiente, AB es paralela a ΓΔ. Q. E. D.

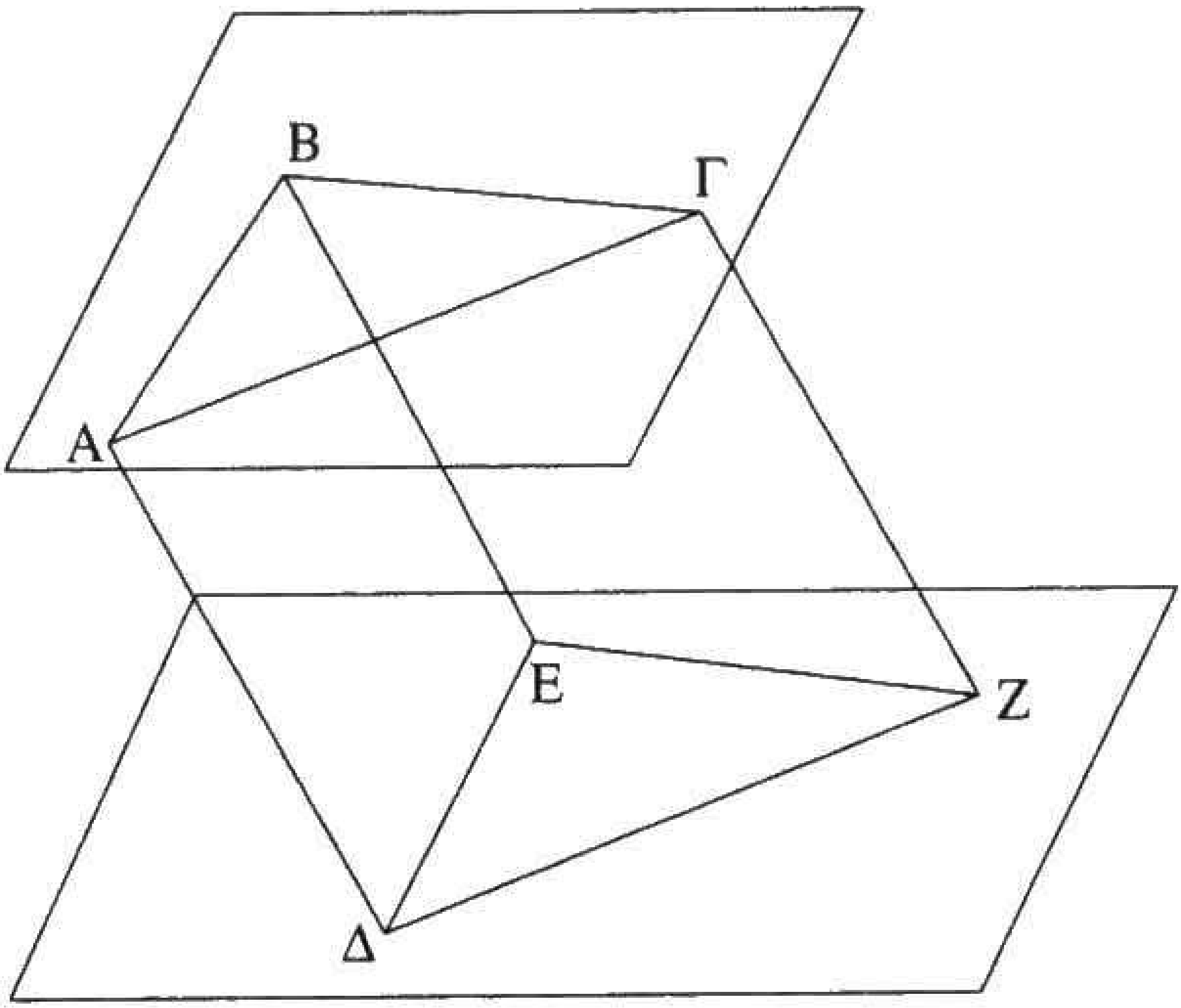
Proposición 10

Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales.

Sean AB, BΓ dos rectas que se tocan, paralelas a las dos rectas que se tocan ΔE, EZ, sin estar en el mismo plano.

Digo que el ángulo ABΓ es igual al (ángulo) ΔEZ.

Tómense, pues, las (rectas) BA, BΓ, EΔ, EZ iguales entre sí, y trácense AΔ, ΓZ, BE, AΓ, ΔZ. Y como BA es igual y paralela a EΔ, entonces AΔ también es igual y paralela a BE [I 33]. Por lo mismo, ΓZ también es igual y paralela a BE; entonces cada una de las (rectas) AΔ, ΓZ es igual y paralela a BE. Pero las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí [XI 9]. Entonces AΔ es igual y paralela a ΓZ. Y AΓ, ΔZ las unen; luego AΔ es paralela a ΔZ [I 33]. Y como los dos (lados) AB, BΓ son iguales a los dos (lados) ΔE, EZ y la base AΓ es igual a la base ΔZ, entonces el ángulo ABΓ es igual al ángulo ΔEZ.



Por consiguiente, si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales. Q. E. D.

Proposición 11

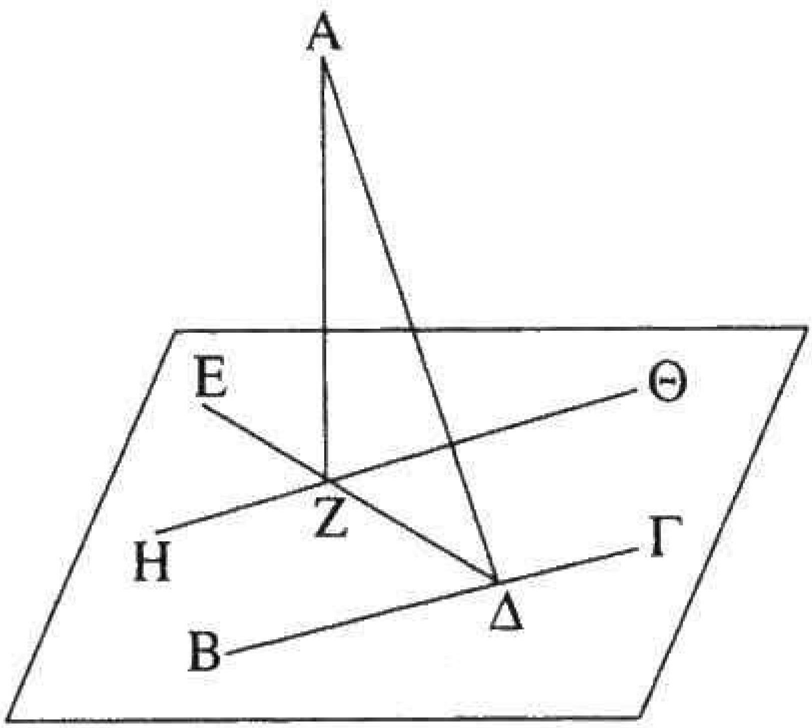
Trazar una línea recta perpendicular a un plano dado desde un punto elevado dado.

Sea A el punto elevado dado y sea el plano de referencia el plano dado.

Así pues, hay que trazar una línea recta perpendicular al plano de referencia desde el punto A.

Trácese, pues, al azar, una recta BΓ en el plano de referencia, y trácese, desde el punto A, la (recta) AΔ perpendicular a BΓ [I 12]. Pues bien, si AΔ es perpendicular también al plano de referencia, habría resultado lo propuesto. Pero si no, trácese, desde el punto Δ, la (recta) ΔE formando ángulos rectos con BΓ en el plano de referencia [I

11] y desde A, la (recta) AZ perpendicular a AE [I 12], y por el punto Z, trácese HΘ paralela a BΓ [I 31].



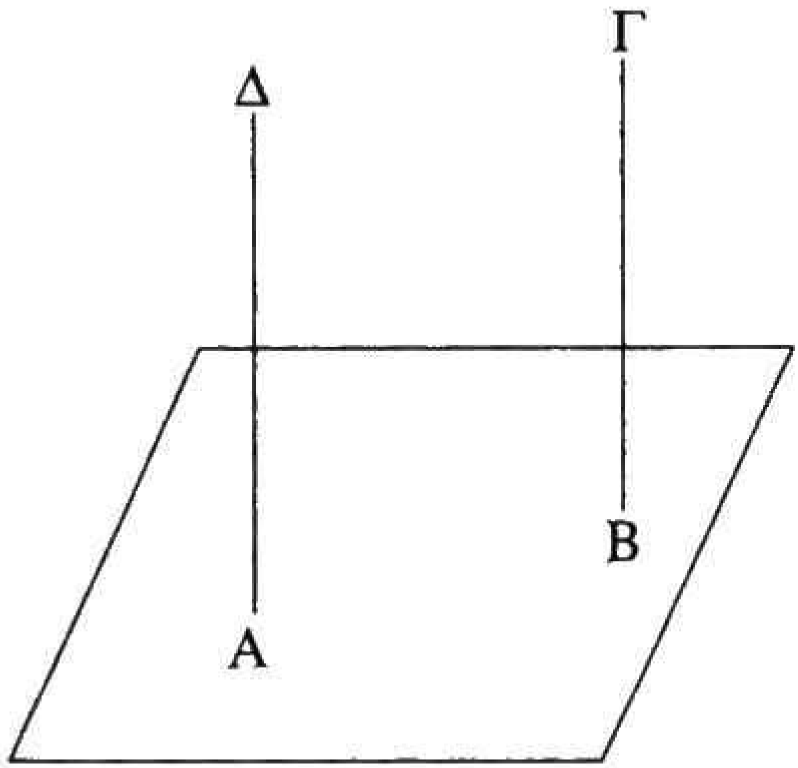
Ahora bien, como BΓ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΔA, ΔE, entonces BΓ forma ángulos rectos también con el plano que pasa a través de EΔA [XI 4]. Y HΘ es paralela a ella. Pero si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano [XI 8]; luego HΘ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de EΔ, ΔA. Por tanto, HΘ forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano que pasa a través de EΔ, ΔA [XI Def. 3]. Pero AZ que está en el plano que pasa a través de EΔ, ΔA la toca; luego HΘ forma ángulos rectos con ZA. De modo que también ZA forma ángulos rectos con ΘH. Pero AZ forma ángulos rectos con ΔE; entonces AZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) HΘ, ΔE. Ahora bien, si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan, en su punto de sección, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas [XI 4]. Luego ZA forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de EΔ, HΘ. Pero el plano que pasa a través de EΔ, HΘ es el plano de referencia; por tanto, AZ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, se ha trazado la línea recta AZ perpendicular al plano de referencia, desde el punto elevado dado, A. Q. E. F.

Proposición 12

Levantar una línea recta formando ángulos rectos con un plano dado desde un punto dado en él.

Sea el plano de referencia el plano dado y A el punto en él. Así pues hay que levantar una línea recta formando ángulos rectos con el plano de referencia desde el punto A.



Considérese un punto elevado cualquiera B y trácese desde el punto B, BΓ perpendicular al plano de referencia [XI 11], y por el punto A trácese AΔ paralela a BΓ [I 31].

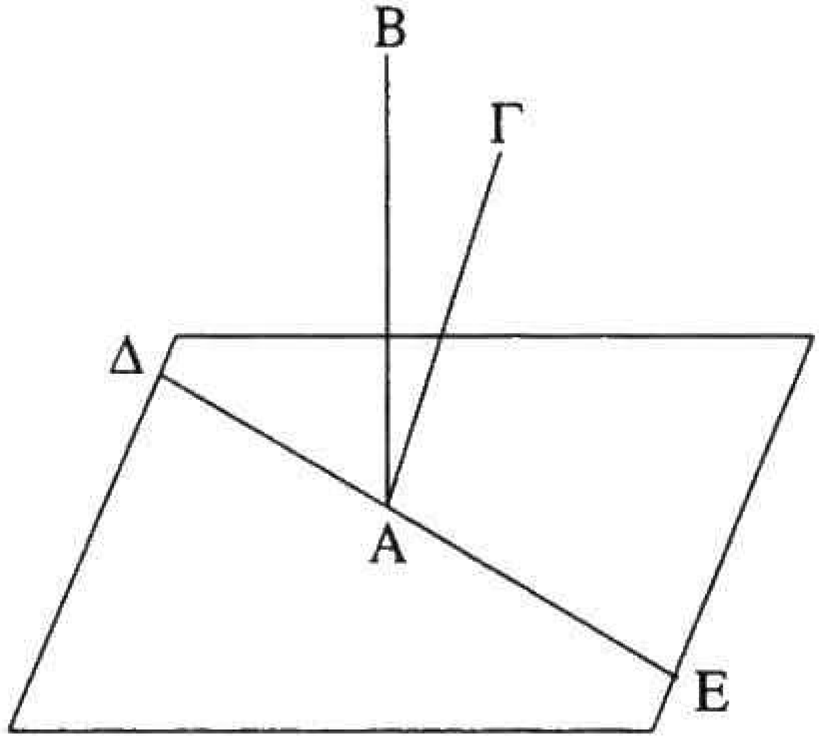
Pues bien, como AΔ, ΓB son dos rectas paralelas y una de ellas, BΓ, forma ángulos rectos con el plano de referencia, entonces la restante AΔ forma también ángulos rectos con el plano de referencia [XI 8].

Por consiguiente, se ha levantado la (recta) AΔ formando ángulos rectos con el plano dado en su punto A. Q. E. F.

Proposición 13

No podrán levantarse por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.

Pues, si fuera posible, levántense por el mismo lado las dos rectas AB, AΓ formando ángulos rectos con el plano de referencia, desde el mismo punto A, y trácese el plano que pasa a través de BA, AΓ; entonces producirá una recta como sección, a través del punto A, en el plano de referencia [XI 3]. Produzca la (recta) ΔAE; entonces las rectas AB, AΓ, ΔAE están en un plano. Y como ΓA forma ángulos rectos con el plano de referencia, entonces hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero ΔAE, que está en el plano de referencia, la toca; luego el ángulo ΓAE es recto. Por lo mismo, el ángulo BAE es también recto; luego el (ángulo) ΓAE es igual al (ángulo) BAE. Y están en un plano; lo cual es imposible.



Por consiguiente, no se levantarán por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto. Q. E. D.

Proposición 14

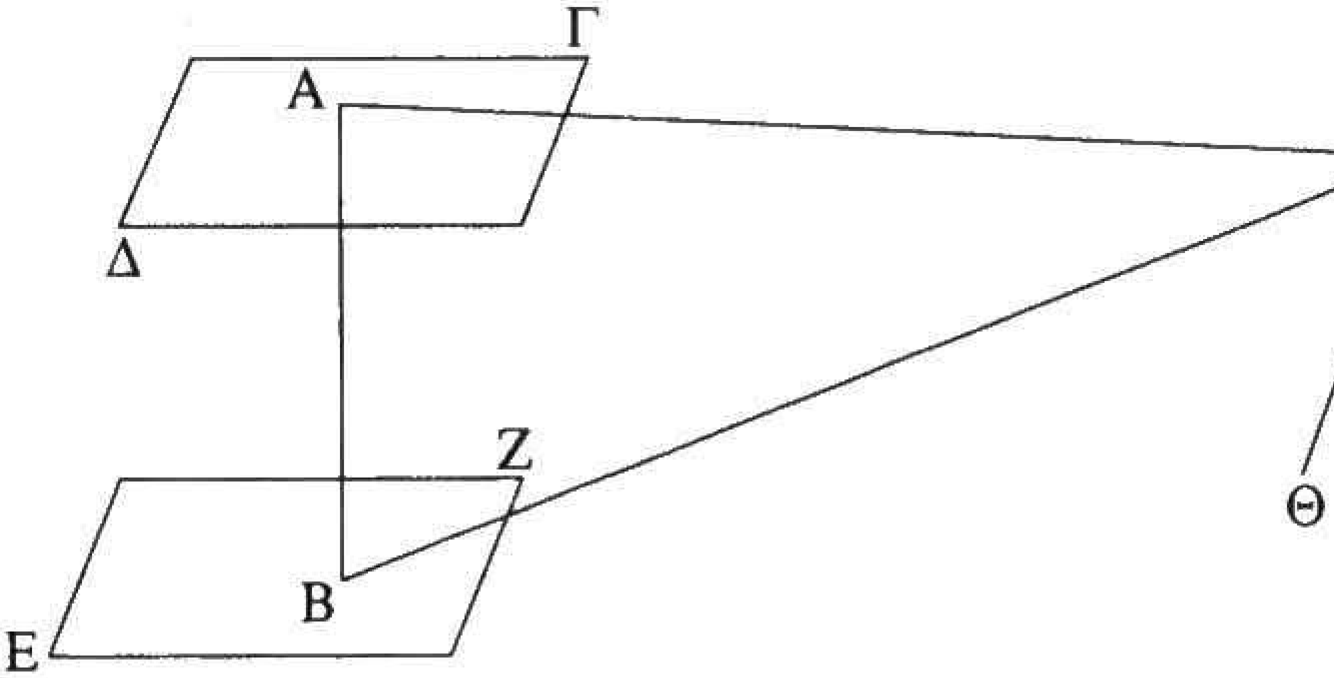
Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.

Forme, pues, ángulos rectos una recta cualquiera, AB, con cada uno de los planos ΓΔ, EZ.

Digo que los planos son paralelos.

Pues si no, se encontrarán al prolongarse. Encuéntrense; entonces producirán una recta como sección común [XI 3]. Produzcan la (recta) HΘ, y tómese al azar el punto K en la (recta) HΘ y trácense AK, BK. Y como AB forma ángulos rectos con el plano EZ, entonces AB forma ángulos rectos con la recta BK que está en la prolongación del plano EZ [XI Def. 3]; luego el ángulo ABK es recto. Por lo mismo el ángulo BAK también es recto. Entonces los dos ángulos ABK, BAK del triángulo ABK son iguales a dos rectos;

lo cual es imposible [I 17]; luego los planos ΓΔ, EZ prolongados no se encontrarán; por tanto los planos ΓΔ, EZ son paralelos.



Por consiguiente, los planos con los que la misma recta forma ángulos rectos serán planos paralelos. Q. E. D.

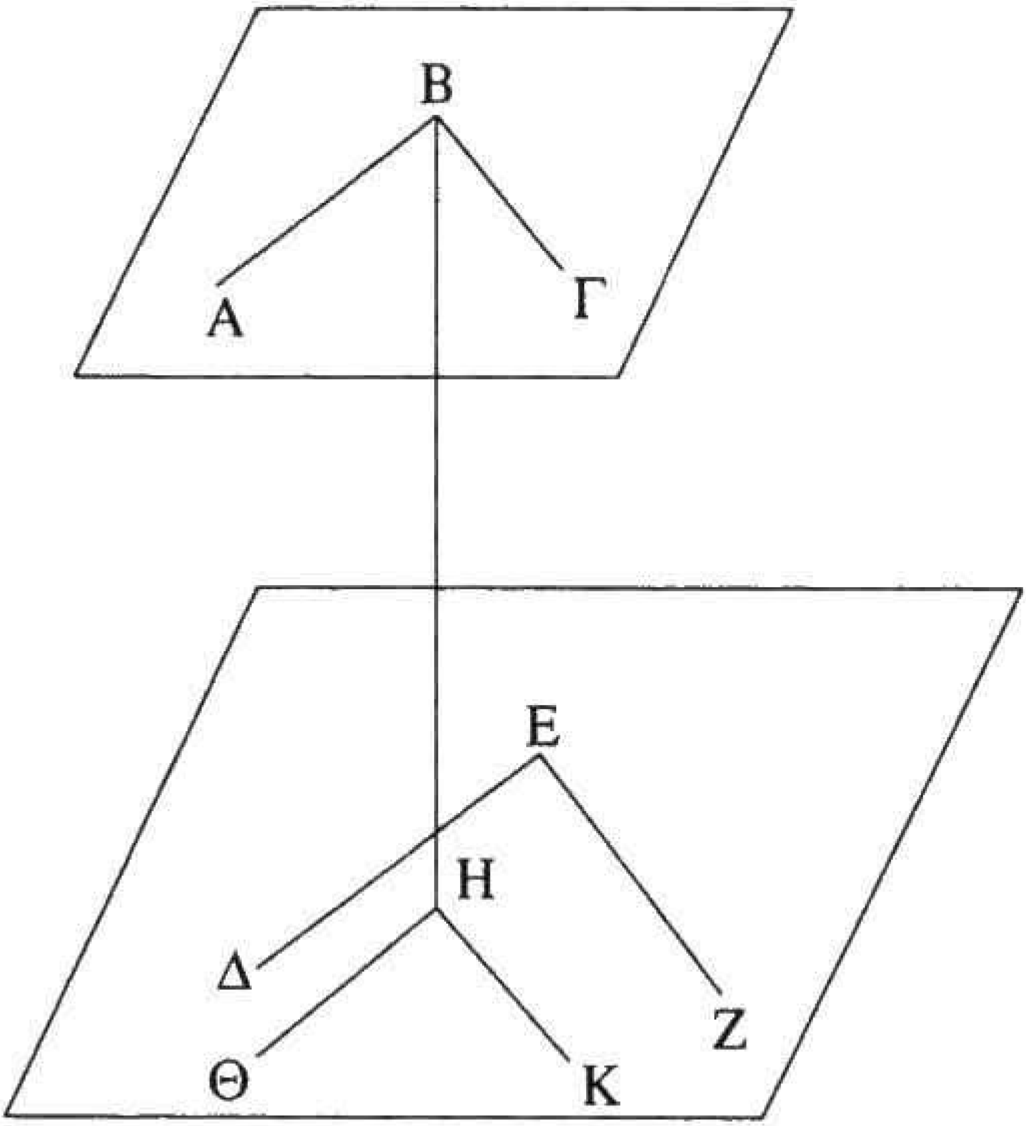
Proposición 15

Si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos.

Pues sean las rectas que se tocan AB, BΓ paralelas a las dos rectas que se tocan ΔE, EZ sin estar en el mismo plano.

Digo que los planos que pasan a través de AB, BΓ, ΔE, EZ, prolongados, no se encontrarán.

Trácese, pues, desde el punto B, BH perpendicular al plano que pasa a través de ΔE, EZ [XI 11], y únase con el plano en el punto H; trácese, por el punto H, la (recta) HΘ paralela a EΔ y la (recta) HK (paralela) a EZ [I 31]. Y como BH forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΔE, EZ, entonces hará ángulos rectos con todas las rectas que la toquen y estén en el plano que pasa a través de ΔE, EZ [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas HΘ, HK que están en el plano que pasa a través de ΔE, EZ la tocan; luego cada uno de los ángulos BHΘ, BHK es recto. Y como BA es paralela a HΘ [XI 9], entonces los ángulos HBA, BHΘ son iguales a dos rectos [I 29]. Pero el (ángulo) BHΘ es recto; entonces el (ángulo) HBA es también recto; luego HB forma ángulos rectos con BA. Por lo mismo HB forma también ángulos rectos con BΓ. Pues bien, como la recta HB se ha levantado formando ángulos rectos con las dos rectas que se cortan BA, BΓ, entonces HB forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de BA, BΓ [XI 4]. Pero los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos son planos paralelos [XI 14]; luego el plano que pasa a través de AB, BΓ es paralelo al plano que pasa a través de ΔE, EZ.

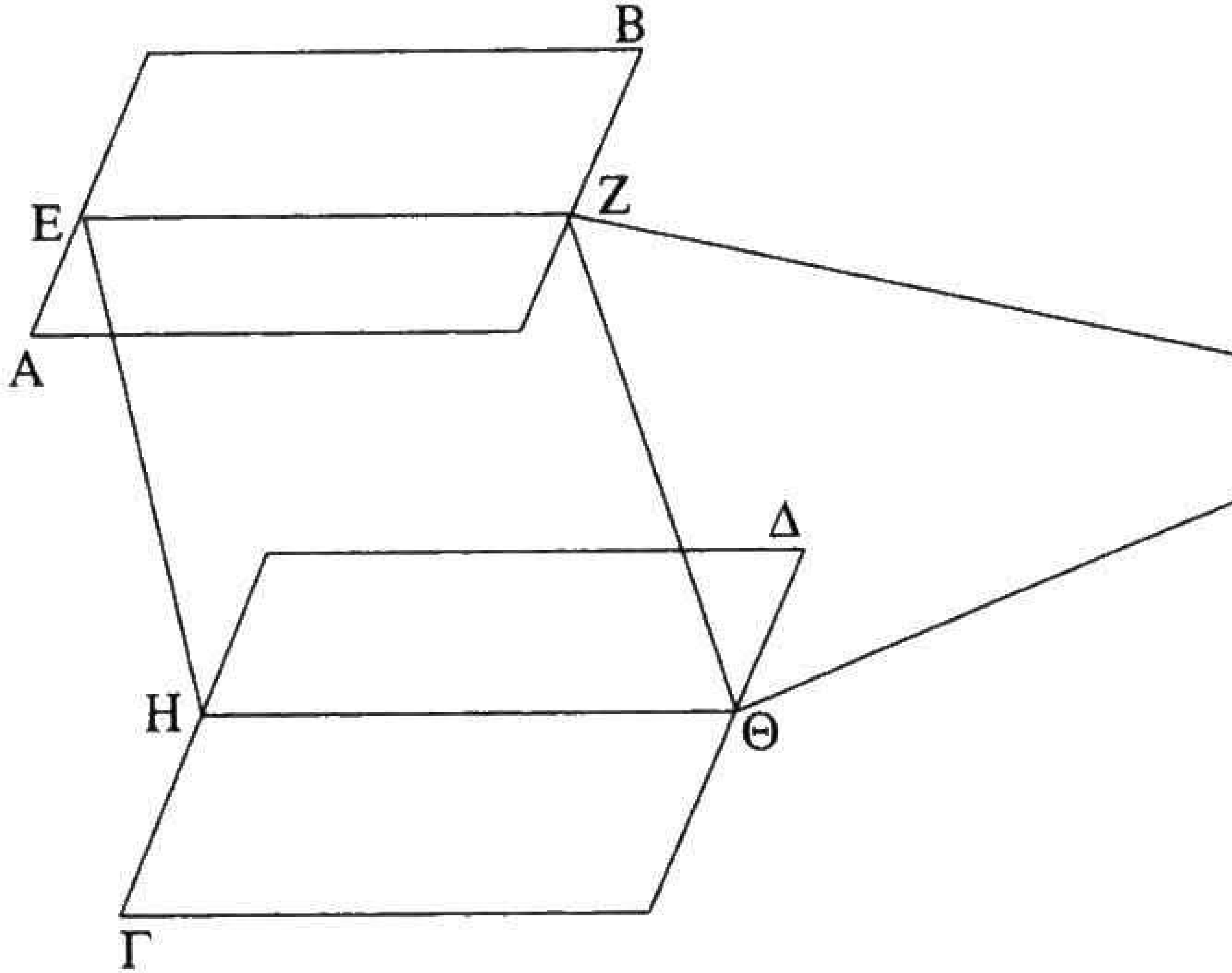


Por consiguiente, si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos. Q. E. D.

Proposición 16

Si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas.

Sean cortados, pues, los dos planos paralelos AB, ΓΔ por el plano EZHΘ, y sean sus secciones comunes EZ, HΘ.



Digo que EZ es paralela a HΘ.

Pues, si no, EZ, HΘ se encontrarán si se prolongan en la dirección de Z, Θ o en la dirección de E, H. Prolónguense en la dirección de Z, Θ y encuéntrense, en primer lugar en el (punto) K. Ahora bien, como EZK están en el plano AB, entonces todos los puntos de la (recta) EZK están en el plano AB [X 1]. Pero K es uno de los puntos de la recta EZK, luego K está en el plano AB. Por lo mismo, entonces K está también en el plano ΓΔ; por tanto los planos AB, ΓΔ, si se prolongan, se encontrarán. Pero no se encuentran porque se ha supuesto que son paralelos; entonces las rectas EZ, HΘ no se encontrarán si se prolongan en la dirección de Z, Θ. De manera semejante demostraríamos que las rectas EZ, HΘ tampoco se encontrarán si se prolongan en la dirección de E, H. Pero las (rectas) que no se encuentran en ninguna de las dos direcciones son paralelas. Luego EZ es paralela a HΘ.

Por consiguiente, si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas. Q. E. D.

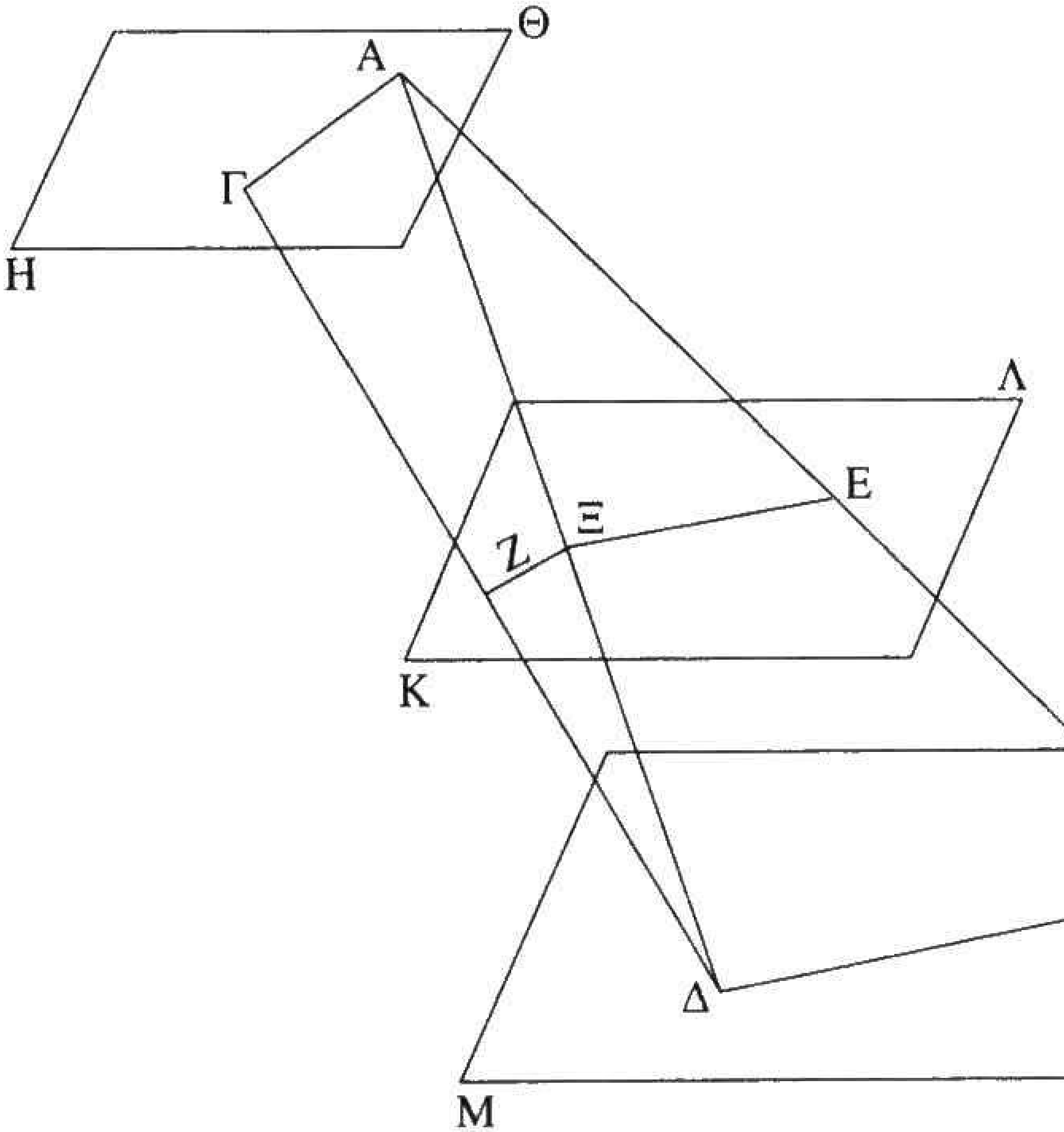
Proposición 17

Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en las mismas razones.

Sean cortadas, pues, las dos rectas AB, ΓΔ por los planos paralelos HΘ, KΛ, MN, en los puntos A, E, B, Γ, Z, Δ.

Digo que, como la recta AE es a la recta EB, así ΓZ a ZΔ.

Trácense, pues, las (rectas) AΓ, BΔ, AΔ y únase AΔ con el plano KΛ en el punto Ξ y trácense EΞ, ΞZ. Y como los dos planos paralelos KΛ, MN son cortados por el plano EBΔΞ, sus secciones comunes EΞ, BΔ son paralelas [XI 16]. Por lo mismo, como los dos planos HΘ, KΛ son cortados por el plano AΞZΓ, sus secciones comunes AΓ, ΞZ son paralelas [id.]. Y puesto que se ha trazado la recta EΞ paralela a la BΔ, uno de los lados del triángulo ABΔ, entonces, proporcionalmente, como AE es a EB, así AΞ a ΞΔ [VI 2]. Y puesto que se ha trazado a su vez la recta ΞZ paralela a AΓ, uno de los lados del triángulo AΔΓ, entonces, proporcionalmente, como AΞ es a ΞΔ, así ΓZ a ZΔ [id.]. Pero se ha demostrado también que como AΞ es a ΞΔ, así AE a EB; luego, como AE es a EB, así ΓZ a ZΔ [V 11].



Por consiguiente, si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en la misma razón. Q. E. D.

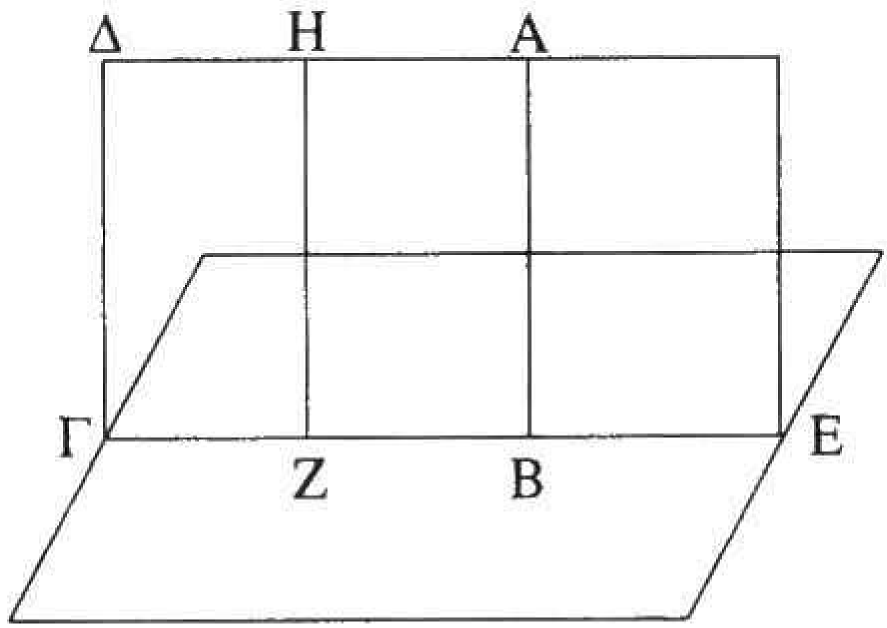
Proposición 18

Si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasen a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues forme ángulos rectos una recta cualquiera, AB, con el plano de referencia.

Digo que todos los planos que pasan a través de AB forman también ángulos rectos con el plano de referencia.

Trácese, pues, el plano ΔE a través de AB y sea ΓE la sección común del plano ΔE y el de referencia; tómese al azar el punto Z en ΓE, y trácese, desde el punto Z, la (recta) ZH formando ángulos rectos con ΓE en el plano ΔE [I 11]. Ahora bien, como AB es ortogonal al plano de referencia, entonces AB formará también ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; de modo que también forma ángulos rectos con ΓE; luego el ángulo ABZ es recto. Pero el (ángulo) HZB es también recto; luego AB es paralela a ZH [I 28]. Pero AB forma ángulos rectos con el plano de referencia; entonces ZH forma también ángulos rectos con el plano de referencia [XI 8]. Ahora bien, un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la sección común de los (dos) planos forman ángulos rectos con el plano restante [XI Def. 4]. Y se ha demostrado que la (recta) ZH, trazada en uno de los planos ΔE, formando ángulos rectos con la sección común de los planos ΓE, forma ángulos rectos con el plano de referencia; por tanto, el plano ΔE forma ángulos rectos con el de referencia. De manera semejante demostraríamos que todos los planos que pasan a través de AB forman ángulos rectos con el plano de referencia.



Por consiguiente, si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasan a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano. Q. E. D.

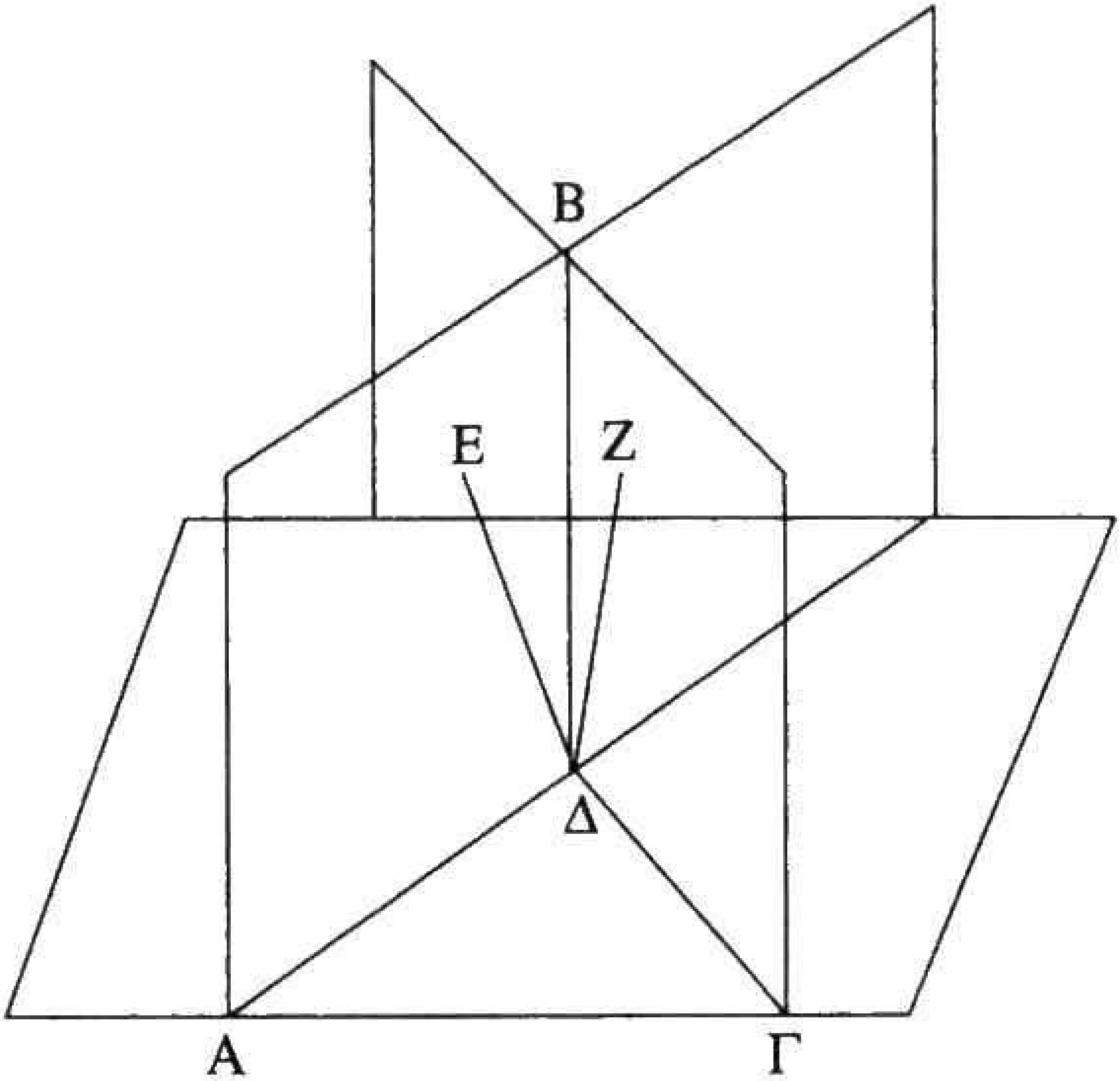
Proposición 19

Si dos planos que se cortan forman ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues formen los dos planos AB, BΓ ángulos rectos con el plano de referencia, y sea BΔ su sección común.

Digo que BΔ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Pues supongamos que no, y trácese desde el punto Δ la (recta) ΔE en el plano AB formando ángulos rectos con la (recta) AΔ y la (recta) ΔZ en el plano BΓ formando ángulos rectos con ΓΔ. Y como el plano AB es ortogonal al plano de referencia, y se ha trazado ΔE en el plano AB formando ángulos rectos con su sección común, AΔ, entonces ΔE es ortogonal al plano de referencia [XI Def. 4]. De manera semejante demostraríamos que ΔZ es también ortogonal al plano de referencia. Entonces se han levantado dos rectas formando ángulos rectos con el plano de referencia desde el mismo punto, Δ, por el mismo lado; lo cual es imposible [XI 13]. Luego no se levantará (otra recta) desde el punto Δ formando ángulos rectos con el plano de referencia excepto ΔB, la sección común de los planos AB, BΓ.



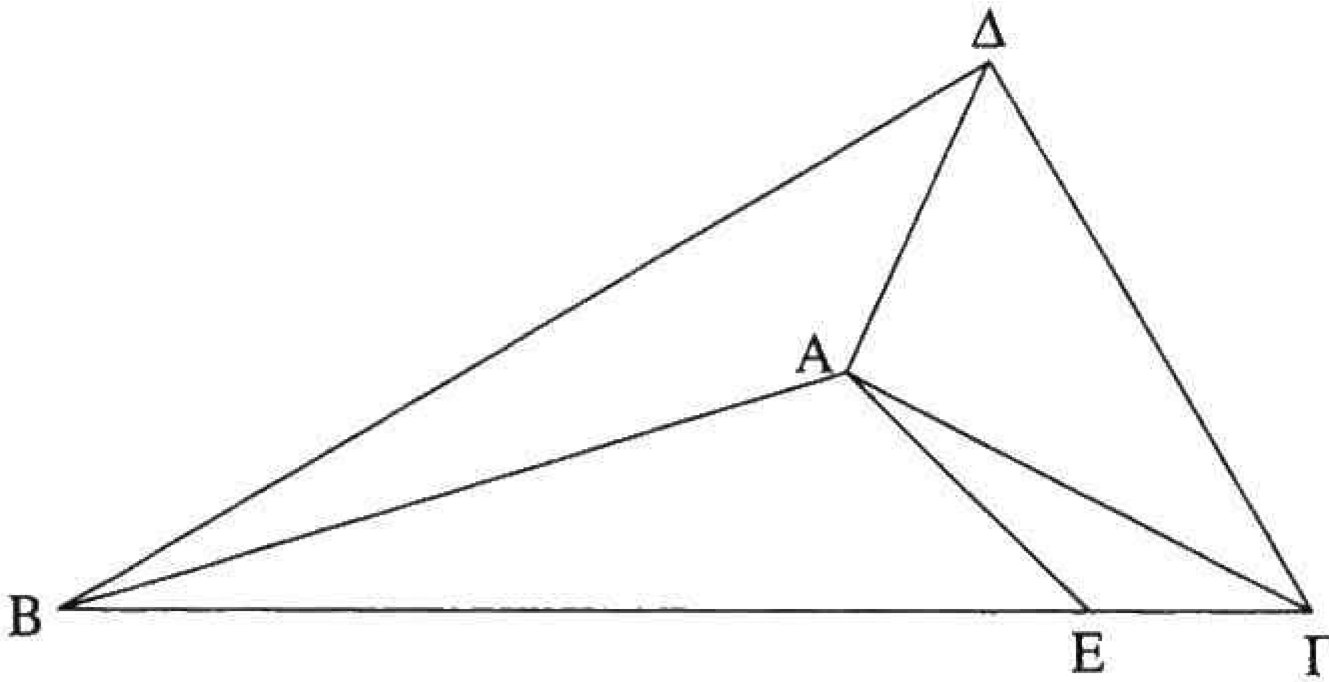
Por consiguiente, si dos planos se cortan formando ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo. Q. E. D.

Proposición 20

Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.

Sea comprendido el ángulo sólido correspondiente a A por los tres ángulos planos ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ.

Digo que dos cualesquiera de los ángulos ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ, tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.



Pues bien, si los ángulos ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ son iguales entre sí, está claro que dos cualesquiera son mayores que el restante. Pero si no, sea mayor el (ángulo) ΒΑΓ y constrúyase sobre la recta ΑΒ y en su punto Α el ángulo ΒΑΕ igual al ángulo ΔΑΒ en el plano que pasa a través de ΒΑΓ; hágase ΑΕ igual a ΑΔ, y corte la (recta) ΒΕΓ trazada por el punto Ε a las rectas ΑΒ, ΑΓ en los puntos Β, Γ, y trácense ΔΒ, ΔΓ. Ahora bien, como ΔΑ es igual a ΑΕ y ΑΒ es común, dos (lados) son iguales a dos (lados); y el ángulo ΔΑΒ es igual al ángulo ΒΑΕ; entonces la base ΔΒ es igual a la base ΒΕ [I 4]. Y como los dos (lados) ΒΔ, ΔΓ son mayores que ΒΓ [I 20], de los cuales se ha demostrado que ΔΒ es igual a ΒΕ, entonces el restante ΔΓ es mayor que el restante ΕΓ. Ahora bien, como ΔΑ es igual a ΑΕ, y ΑΓ es común y la base ΔΓ es mayor que la base ΕΓ, entonces el ángulo ΔΑΓ es mayor que el ángulo ΕΑΓ [I 25]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) ΔΑΒ es igual al (ángulo) ΒΑΕ; luego los (ángulos) ΔΑΒ, ΔΑΓ son mayores que el ángulo ΒΑΓ. De manera semejante demostraríamos que también los restantes tomados juntos dos a dos son mayores que el restante.

Por consiguiente, si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante. Q. E. D.

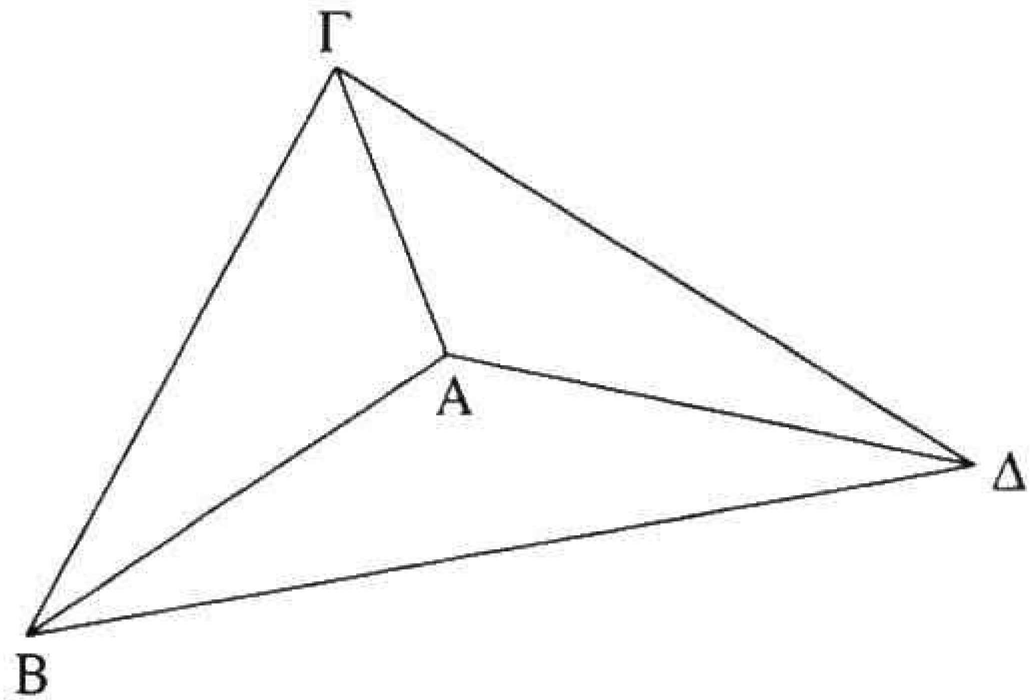
Proposición 21

Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos.

Sea comprendido el ángulo sólido correspondiente a Α por los ángulos planos ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ.

Digo que los (ángulos) ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ son menores que cuatro rectos.

Tómense, pues, al azar, los puntos Β, Γ, Δ en las (rectas) ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ respectivamente, y trácense ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Y como el ángulo sólido correspondiente a Β es comprendido por los tres ángulos planos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, dos cualesquiera son mayores que el restante [XI 20]. Luego los ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ son mayores que el ángulo ΓΒΔ. Por lo mismo los (ángulos) ΒΓΑ, ΑΓΔ también son mayores que el (ángulo) ΒΓΔ, y los (ángulos) ΓΔΑ, ΑΔΒ son mayores que el (ángulo) ΓΔΒ; entonces los seis ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ son mayores que los tres (ángulos) ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ. Pero los tres (ángulos) ΓΒΔ, ΒΔΓ, ΒΓΔ son iguales a dos rectos [I 32]. Luego los seis ángulos ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ son mayores que dos rectos. Y como los tres ángulos de cada uno de los triángulos ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ son iguales a dos rectos, entonces los nueve ángulos ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ de los tres triángulos son iguales a seis rectos, y de ellos los seis ángulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ son mayores que dos rectos; por tanto los tres (ángulos) restantes ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ que comprenden el ángulo sólido son menores que cuatro rectos.

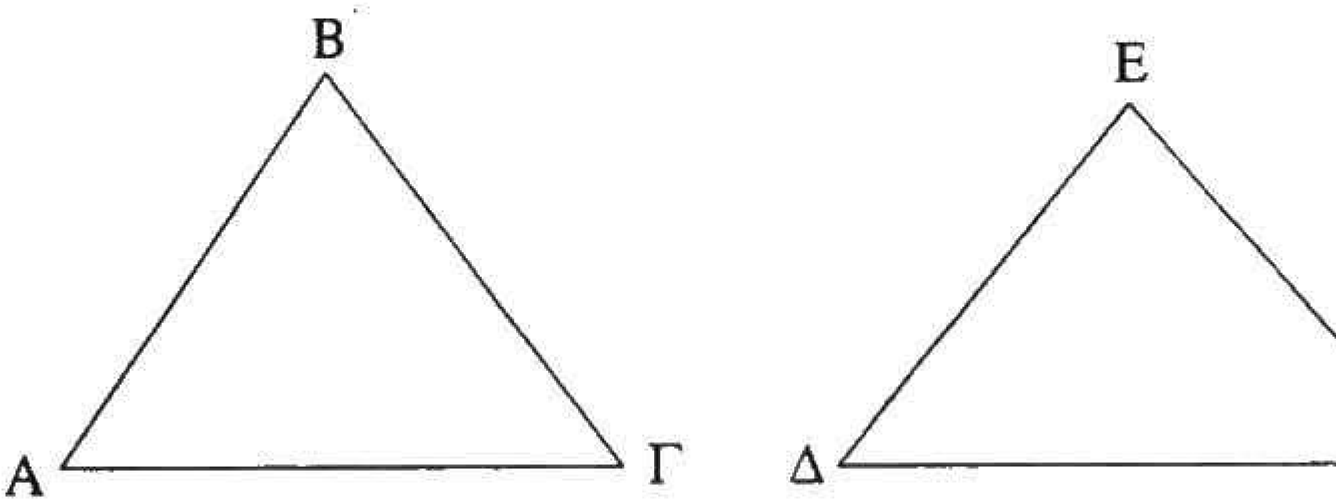


Por consiguiente, todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos. Q. E. D.[54].

Proposición 22

Si hay tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, y los comprenden rectas iguales, es posible construir un triángulo a partir de las (rectas) que unen (los extremos) de las rectas iguales.

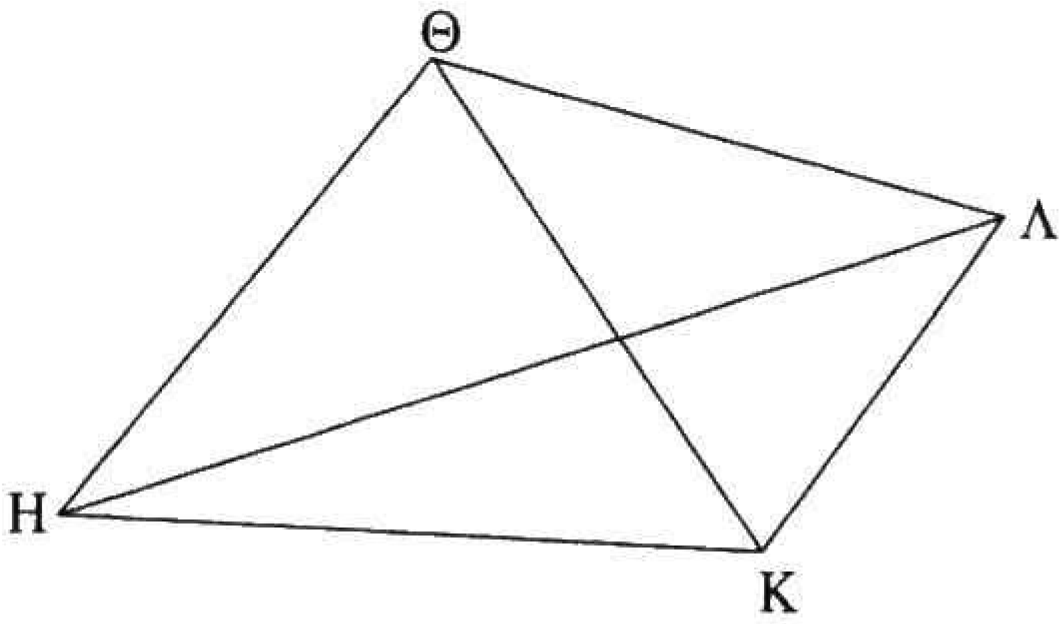
Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, a saber: los (ángulos) ΑΒΓ, ΔΕΖ mayores que el (ángulo) ΗΘΚ, los (ángulos) ΔΕΖ, ΗΘΚ mayores que ΑΒΓ y además los (ángulos) ΗΘΚ, ΑΒΓ (mayores) que ΔΕΖ. Y sean iguales las rectas ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, y trácense ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ.



Digo que es posible construir un triángulo a partir de (rectas) iguales a ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, es decir, que dos cualesquiera de las (rectas) ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ son mayores que la restante.

Pues si los ángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ son iguales entre sí, está claro que, siendo también iguales ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, es posible construir un triángulo a partir de las (rectas) iguales a ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ.

Pero si no, sean desiguales y constrúyase en la recta ΘΚ y en su punto Θ el ángulo ΚΘΛ igual al ángulo ΑΒΓ, y hágase ΘΛ igual a una de las (rectas) ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, y trácense ΚΛ, ΗΛ. Ahora bien, puesto que los dos lados ΑΒ, ΒΓ son iguales a los dos (lados) ΚΘ, ΘΛ, y el ángulo correspondiente a Β es igual al (ángulo) ΚΘΛ, entonces la base ΑΓ es igual a la base ΚΛ [I 4]. Y como los (ángulos) ΑΒΓ, ΗΘΚ son mayores que el (ángulo) ΔΕΖ y el (ángulo) ΔΕΖ y el (ángulo) ΑΒΓ es igual al (ángulo) ΚΘΛ, entonces el (ángulo) ΗΘΛ es mayor que el (ángulo) ΔΕΖ. Y como los dos (lados) ΗΘ, ΘΛ son iguales a los dos (lados) ΔΕ, ΕΖ y el (ángulo) ΗΘΛ es mayor que el (ángulo) ΔΕΖ, entonces la base ΗΛ es mayor que la base ΔΖ [I 24]. Pero ΗΚ, ΚΛ son mayores que ΗΛ. Así pues, ΗΚ, ΚΛ son mucho mayores que ΔΖ. Pero ΚΛ es igual a ΑΓ; luego ΑΓ, ΗΚ son mayores que la restante ΔΖ. De manera semejante demostraríamos que ΑΓ, ΔΖ son también mayores que ΗΚ, y además ΔΖ, ΗΚ son mayores que ΑΓ.

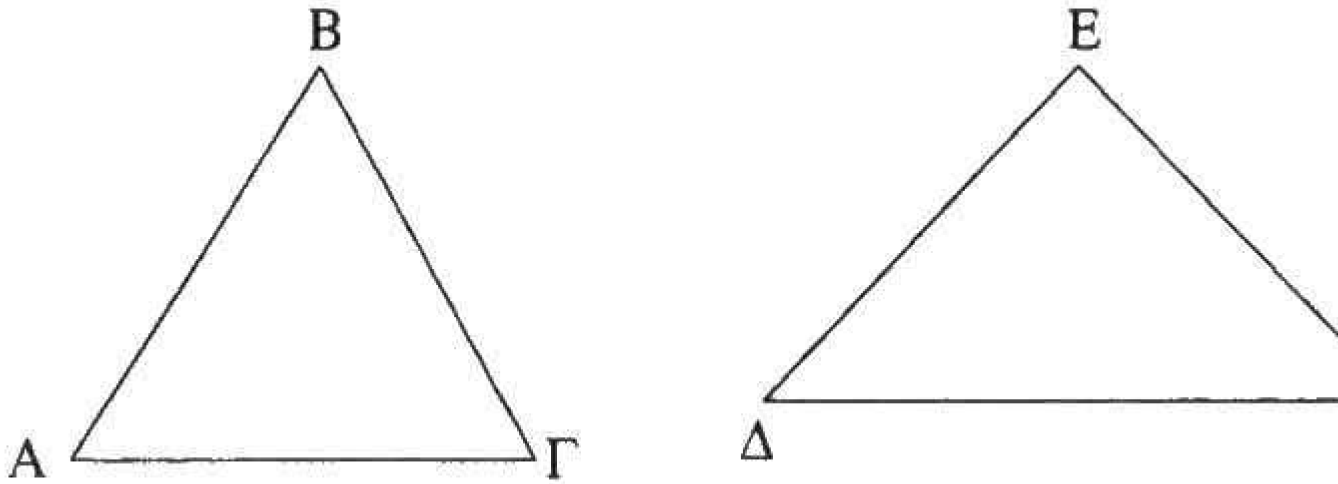


Por consiguiente, es posible construir un triángulo a partir de rectas iguales a las (rectas) ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. Q. E. D.[55].

Proposición 23

Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; entonces, es necesario que los tres ángulos sean menores que cuatro rectos.

Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΚΘ los tres ángulos planos dados, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, siendo los tres además menores que cuatro rectos.



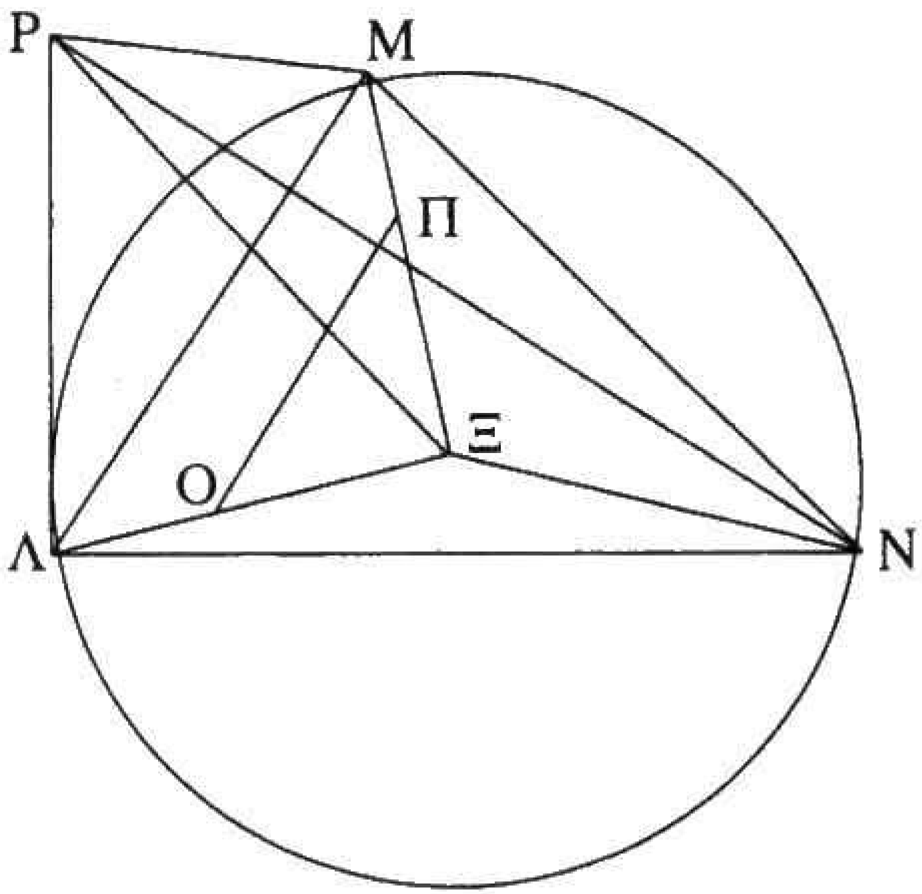
Así pues hay que construir un ángulo sólido a partir de (ángulos) iguales a ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ.

Tómense las (rectas) iguales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, y trácense ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ [XI 22]. Entonces es posible construir un triángulo a partir de rectas iguales a ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ [XI 22]. Construyase y sea ΛΜΝ, de modo que ΑΓ sea igual a ΛΜ, ΔΖ a ΜΝ y además ΗΚ a ΝΛ, y circunscríbase en torno al triángulo ΛΜΝ el círculo ΛΜΝ, tómese su centro y sea Ξ y trácense ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ.

Digo que ΑΒ es mayor que ΛΞ. Pues, si no, o ΑΒ es igual a ΛΞ o es menor. En primer lugar sea igual. Y como ΑΒ es igual a ΛΞ, mientras que ΑΒ es igual a ΒΓ y ΞΛ a ΞΜ, entonces los dos (lados) ΑΒ, ΒΓ son iguales respectivamente a los dos (lados) ΛΞ, ΞΜ; y se ha supuesto que la base ΑΓ es igual a la base ΛΜ; luego el (ángulo) ΑΒΓ es igual al ángulo ΛΞΜ [I 8]. Por la misma razón el (ángulo) ΔΕΖ es igual al (ángulo) ΜΞΝ y además el (ángulo) ΗΘΚ (es igual) al (ángulo) ΝΞΛ, luego los tres ángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ son iguales a los tres ángulos ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ. Pero los tres (ángulos) ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ son iguales a cuatro rectos, entonces los tres (ángulos) ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ son iguales a cuatro rectos. Pero se ha supuesto que son menores que cuatro rectos; lo cual es absurdo. Luego ΑΒ no es igual a ΛΞ.

Digo además que ΑΒ tampoco es menor que ΛΞ.

Porque si fuera posible sea así y hágase ΞΟ igual a ΑΒ, ΞΠ igual a ΒΓ y trácese ΟΠ. Ahora bien, como ΑΒ es igual a ΒΓ, ΞΟ es igual a ΞΠ; de modo que la (recta) restante ΛΟ es igual a ΠΜ. Entonces ΛΜ es paralela a ΟΠ [VI 2] y ΛΜΞ, ΟΠΞ son equiangulares [I 29]; luego, como ΞΛ es a ΛΜ, así ΞΟ a ΟΠ [VI 4]; y por alternancia, como ΛΞ es a ΞΟ, así ΛΜ a ΟΠ [V 16]. Pero ΛΕ es mayor que ΞΟ; entonces ΛΜ es mayor que ΟΠ. Pero ΛΜ se ha hecho igual a ΑΓ. luego ΑΓ es también mayor que ΟΠ. Pues bien, como los dos (lados) ΑΒ, ΒΓ son iguales a los dos (lados) ΟΞ, ΞΠ, y la base ΑΓ es mayor que la base ΟΠ, entonces el (ángulo) ΑΒΓ es mayor que el (ángulo) ΟΞΠ [I 25]. De manera semejante demostraríamos que el (ángulo) ΔΕΖ es también mayor que el (ángulo) ΜΞΝ y el (ángulo) ΗΘΚ (mayor) que el (ángulo) ΝΞΛ. Por tanto, los tres ángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ son mayores que los tres (ángulos) ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ. Pero se ha supuesto que los (ángulos) ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ son menores que cuatro rectos; entonces los (ángulos) ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ son mucho menores que cuatro rectos. Pero también iguales, lo cual es absurdo. Luego ΑΒ no es menor que ΛΞ. Pero se ha demostrado que tampoco es igual; por tanto ΑΒ es mayor que ΛΞ.



Levántese desde el punto Ξ la (recta) ΞΡ formando ángulos rectos con el plano del círculo ΛΜΝ [XI 12]; y sea el cuadrado de ΞΡ igual al (área) en la que el cuadrado de ΑΒ es mayor que el cuadrado de ΛΕ [Lema], y trácense ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Ahora bien, como ΡΞ forma ángulos rectos con el plano del círculo ΛΜΝ, entonces ΡΞ forma también ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ. Y como ΛΞ es igual a ΞΜ y ΞΡ es común y forma ángulos rectos, entonces la base ΡΛ es igual a la base ΡΜ [I 4]. Por lo mismo ΡΝ es igual a cada una de las (rectas) ΡΛ, ΡΜ; entonces las tres (rectas) ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ son iguales entre sí. Y como se ha supuesto que el (cuadrado) de ΞΡ es igual al (área) en la que el (cuadrado) de ΑΒ es mayor que el (cuadrado) de ΛΕ, entonces el (cuadrado) de ΑΒ es igual a los (cuadrados) de ΛΞ, ΞΡ. Pero el (cuadrado) de ΛΡ es igual a los (cuadrados) de ΛΞ, ΞΡ: porque el (ángulo) ΛΞΡ es recto [I 47]; entonces el (cuadrado) de ΑΒ es igual al (cuadrado) de ΡΛ; luego ΑΒ es igual a ΡΛ. Pero cada una de las (rectas) ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ es igual a ΑΒ, y cada una de las (rectas) ΡΜ, ΡΝ es igual a ΡΛ; entonces cada una de las (rectas) ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ es igual a cada una de las (rectas) ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Ahora bien, como los dos (lados) ΛΡ, ΡΜ son iguales a los dos (lados) ΑΒ, ΒΓ y se ha supuesto que la base ΛΜ es igual a la base ΑΓ, entonces el ángulo

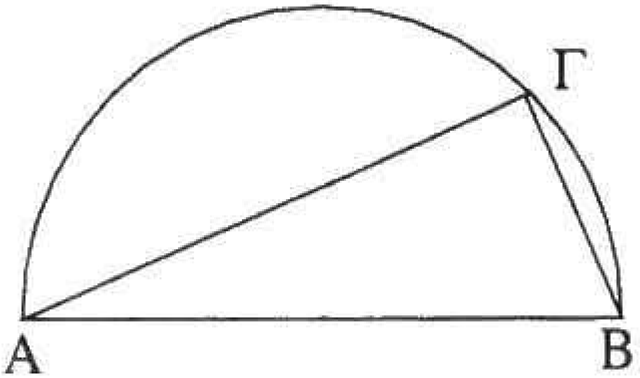
ΛPM es igual al ángulo ABΓ [I 8]. Por lo mismo, el (ángulo) MPN es igual al (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) ΛPN al (ángulo) HΘK.

Por consiguiente, a partir de los tres ángulos planos ΛPM, MPN, ΛPN que son iguales a los tres dados ABΓ, ΔEZ, HΘK, se ha construido el ángulo sólido correspondiente a P comprendido por los ángulos ΛPM, MPN, ΛPN. Q. E. F.[56].

LEMA:

Demostraríamos como sigue de qué manera se puede tomar el cuadrado de ΞP igual al área en la que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de ΛΞ:

Pónganse las rectas AB, ΛΞ, y sea AB mayor, y descríbase sobre ella el semicírculo ABΓ, y adáptese al semicírculo ABΓ la (recta) AΓ igual a la recta ΛΞ que no sea mayor que el diámetro AB [IV 1]; y trácese ΓB. Así pues, como AΓB es un ángulo en el semicírculo AΓB, entonces el (ángulo) AΓB es recto [III 31]. Luego el cuadrado de AB es igual a los cuadrados de AΓ, ΓB [I 47]. De modo que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de AΓ en el cuadrado de ΓB. Pero AΓ es igual a ΛΞ. Luego el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de ΛΞ en el cuadrado de ΓB. Pues bien, si tomamos la (recta) ΞP igual a BΓ, el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de ΛΞ en el cuadrado de ΞP. Que es lo que se ha propuesto hacer.



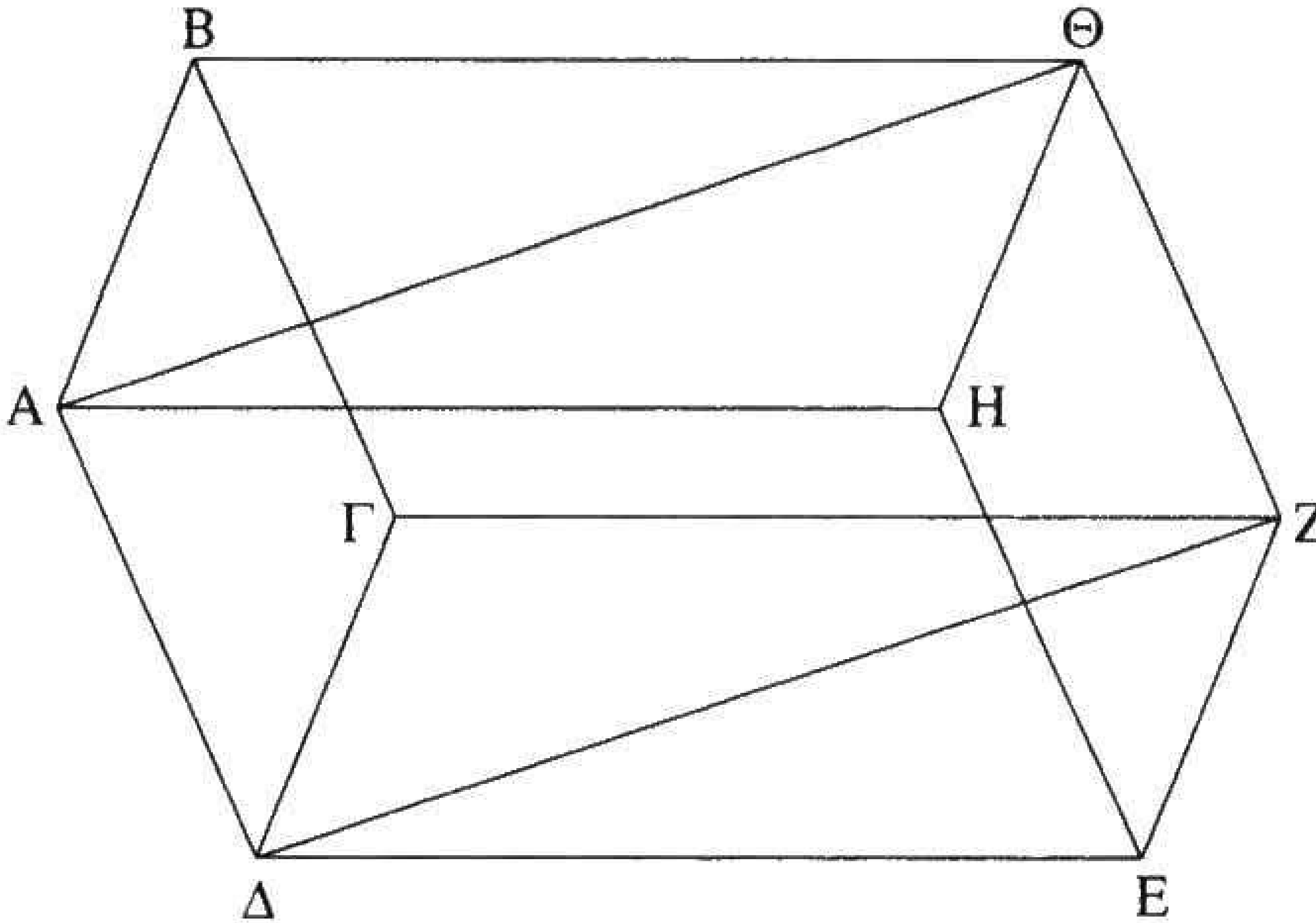
PROPOSICIÓN 24

Si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Sea comprendido el sólido ΓΔΘH por los planos paralelos AΓ, HZ, AΘ, ΔZ, BZ, AE .

Digo que sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Pues como los dos planos paralelos BH, ΓE se cortan por el plano AΓ, sus secciones comunes son paralelas [XI 16]. Entonces AB es paralela a ΔΓ. Como los dos planos paralelos BZ, AE se cortan a su vez por el plano AΓ, sus secciones comunes son paralelas [XI 16]. Entonces BΓ es paralela a AΔ. Pero se ha demostrado que AB es paralela a ΔΓ; luego AΓ es un paralelogramo. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los (planos) ΔZ, ZH, HB, BZ, AE es un paralelogramo.



Trácense las (rectas) AΘ, ΔZ. Y como AB es paralela a ΔΓ y BΘ a ΓZ, entonces las dos rectas que se tocan AB, BΘ son paralelas a las dos rectas que se tocan ΔΓ, Γz sin estar en el mismo plano. Luego comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Por tanto el ángulo ABΘ es igual al (ángulo) ΔΓZ. Y como los dos (lados) AB, BΘ son iguales a los dos (lados) ΔΓ, ΓZ [I 34], y el (ángulo) ABΘ es igual al ángulo ΔΓZ, entonces la base AΘ es igual a la base ΔZ, y el triángulo ABΘ es igual al triángulo ΔΓZ [14]. Ahora bien, el paralelogramo BH es el doble del (triángulo) ABΘ y el paralelogramo ΓE es doble del (triángulo) ΔΓZ [I 34]; luego el paralelogramo BH es igual al paralelogramo ΓE. De manera semejante demostraríamos que el (paralelogramo) AΓ es igual al (paralelogramo) HZ y el (paralelogramo) AE al (paralelogramo) BZ.

Por consiguiente, si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos. Q. E. D.[57].

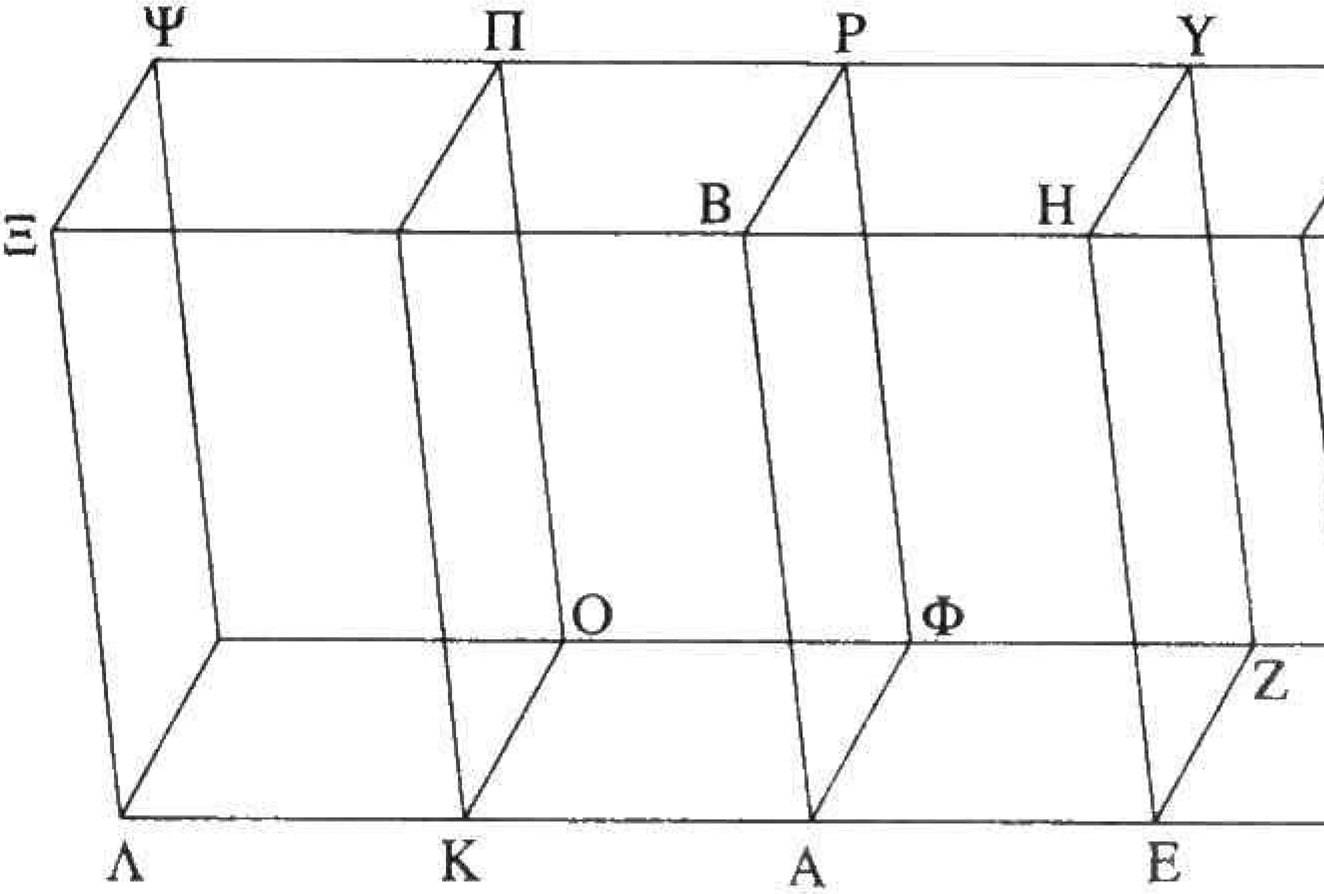
Proposición 25

Si un sólido paralelepípedo[58] *es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base es a la base, así será el sólido al sólido.*

Sea cortado, pues, el sólido paralelepípedo ΑΒΓΔ por el plano ΖΗ que es paralelo a los planos opuestos ΡΑ, ΔΘ.

Digo que como la base ΑΕΖΦ es a la base ΕΘΓΖ, así el sólido ΑΒΖΥ es al sólido ΕΗΓΔ.

Pues prolónguese ΑΘ por cada lado y hágase un número cualquiera de (rectas) ΑΚ, ΚΛ iguales a ΑΕ, y un número cualquiera de (rectas) ΘΜ, ΜΝ iguales a ΕΘ, y complétense los paralelogramos ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ y los sólidos ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ. Ahora bien, como las rectas ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ son iguales entre sí, los paralelogramos ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ son también iguales entre sí, y ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ (son iguales) entre sí y además Λψ, ΚΠ, ΑΡ (son iguales) entre sí: porque son opuestos [XI 24].



Por la misma razón, los paralelogramos ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ son también iguales entre sí, y los (paralelogramos) ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ son también iguales entre sí, y además los (paralelogramos) ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ son iguales entre sí; entonces, en los sólidos ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ tres planos son iguales a tres planos. Y los tres planos son iguales a los tres opuestos. Luego los tres sólidos ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ son iguales entre sí.

Por lo mismo, los tres solidos ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ son iguales entre sí; así pues, cuantas veces la base ΛΖ es múltiplo de la base ΑΖ, tantas es múltiplo el sólido ΛΥ del sólido ΑΥ.

Por lo mismo, cuantas veces la base ΝΖ es múltiplo de la base ΖΘ, tantas es múltiplo el sólido ΝΥ del sólido ΘΥ. Y si la base ΛΖ es igual a la base ΝΖ, el sólido ΛΥ es igual al sólido ΝΥ, y si la base ΛΖ excede a la base ΝΖ, el sólido ΛΥ excede al sólido ΝΥ, y si (uno) es deficiente el (otro) es deficiente. Por tanto, habiendo cuatro magnitudes, a saber: las dos bases ΑΖ, ΖΘ y los dos sólidos ΑΥ, ΥΘ, se han tomado como equimúltiplos de la base ΑΖ y del sólido ΑΥ, la base ΛΖ y el sólido ΛΥ, y de la base ΘΖ y el sólido ΘΥ, la base ΝΖ y el sólido ΝΥ, y se ha demostrado que si la base ΛΖ excede a la base ΖΝ, el sólido ΛΥ excede también al sólido ΝΥ, y si es igual, es igual y si es deficiente, es deficiente.

Por consiguiente, como la base ΑΖ es a la base ΖΘ, así el sólido ΑΥ al sólido ΥΘ. Q. E. D.

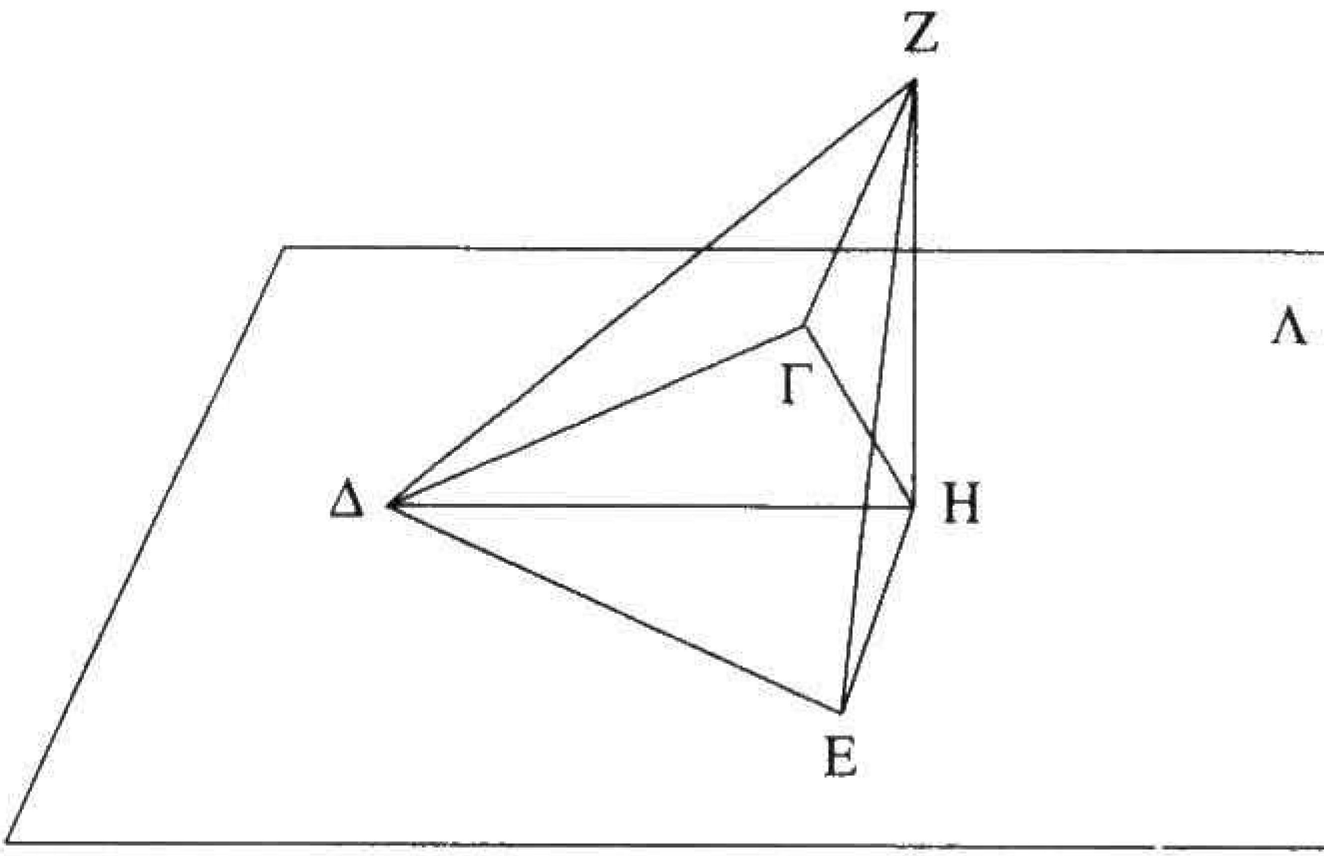
Proposición 26

Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Sea ΑΒ la recta dada y Α el punto dado en ella y sea el (ángulo) correspondiente a Α el ángulo dado, comprendido por los ángulos planos ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ.

Así pues, hay que construir un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a Δ sobre la recta ΑΒ y en su punto Α.

Tómese al azar un punto Ζ en la (recta) ΔΖ; trácese ΖΗ desde el (punto) Ζ perpendicular al plano que pasa por ΕΔ, ΔΓ [XI 11], y únase con el plano en el (punto) Η; trácese ΔΗ y constrúyase sobre la recta ΑΒ y en su punto Α el (ángulo) ΒΑΛ igual al ángulo ΕΔΓ, y el (ángulo) ΒΑΚ igual al ángulo ΕΔΗ [I 23]; hágase ΑΚ igual a ΔΗ y levántese desde el punto Κ la (recta) ΚΘ formando ángulos rectos con el plano que pasa por ΒΑΛ [XI 12]; hágase ΚΘ igual a ΗΖ y trácese ΘΑ.



Digo que el ángulo sólido correspondiente a A, comprendido por los ángulos BAΛ, BAΘ, ΘAΛ es igual al ángulo sólido correspondiente a Δ, comprendido por los ángulos EΔΓ, EΔZ, ZΔΓ.

Pues tómense las (rectas) iguales AB, ΔE y trácense ΘB, KB, ZE, HE. Y como ZH es ortogonal al plano de referencia, entonces hará ángulos rectos con todas las (rectas) que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; luego cada uno de los ángulos ZHΔ, ZHE es recto. Por lo mismo, cada uno de los ángulos ΘKA, ΘKB es también recto. Y como los dos (lados) KA, AB son iguales respectivamente a los dos (lados) HΔ, ΔE y comprenden ángulos iguales, entonces la base KB es igual a la base HE [I 4]. Pero KΘ es igual a HZ; y comprenden ángulos rectos; entonces también ΘB es igual a ZE [I 4]. Como los dos (lados) AK, KΘ son a su vez iguales a los dos (lados) ΔH, HZ y comprenden ángulos rectos, entonces la base AΘ es igual a la base ZΔ [I 4]. Pero AB es igual también a ΔE; entonces los dos (lados) ΘA, AB son iguales a los dos (lados) ΔZ, ΔE. Y la base ΘB es igual a la base ZE; luego el ángulo BAΘ es igual al ángulo EΔZ [I 8]. Por lo mismo, el (ángulo) ΘAΛ es también igual al (ángulo) ZΔΓ. Y el (ángulo) BAΛ es también igual al (ángulo) EΔΓ.

Por consiguiente, se ha construido (un ángulo sólido) igual al ángulo sólido dado correspondiente a Δ, sobre la recta dada AB y en su punto dado A. Q. E. F.

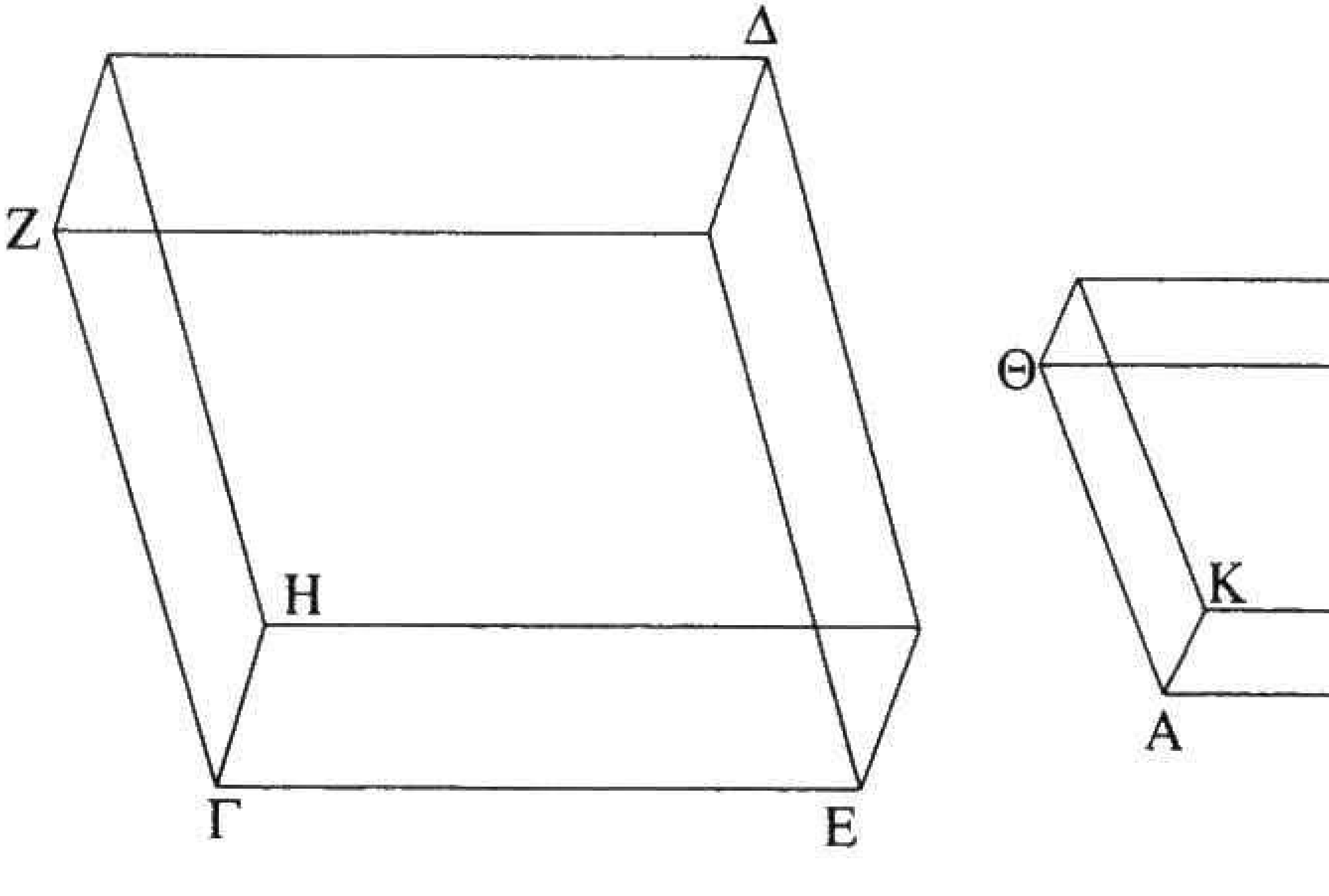
Proposición 27

Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado.

Sea AB la recta dada y ΓΔ el sólido paralelepípedo dado.

Así pues, hay que trazar sobre la recta dada AB un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante al sólido paralelepípedo dado ΓΔ.

Constrúyase, pues, en la recta AB y en su punto A un (ángulo) igual al ángulo sólido correspondiente a Γ comprendido por los (ángulos) BAΘ, ΘAK, KAB, de modo que el (ángulo) BAΘ sea igual al ángulo EΓZ, el (ángulo) BAK al (ángulo) EΓH y el (ángulo) KAΘ al (ángulo) HΓZ; y hágase de forma que, como EΓ es a ΓH, así BA a AK, y como HΓ es a ΓZ, así KA a AΘ [VI 12]. Luego, por igualdad, como EΓ es a ΓZ, así BA a AΘ [V 22]. Complétese el paralelogramo ΘB y el sólido AΛ.



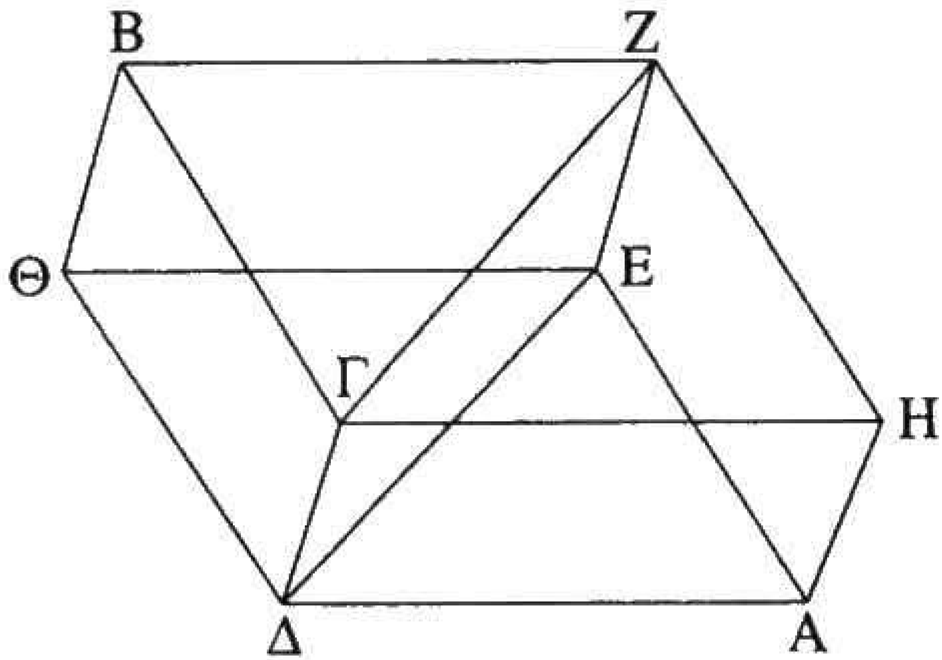
Y dado que, como EΓ es a ΓH, así BA a AK, y los lados que comprenden los ángulos iguales EΓH, BAK son proporcionales, entonces el paralelogramo HE es semejante al paralelogramo KB. Por lo mismo, el paralelogramo KΘ es semejante al paralelogramo HZ y ZE a ΘB; luego tres paralelogramos del sólido ΓΔ son semejantes a tres paralelogramos del sólido AΛ. Pero los tres primeros son iguales y semejantes a los tres opuestos y los otros tres son también iguales y semejantes a los tres opuestos; luego el sólido entero ΓΔ es semejante al sólido entero ΑΛ [XI Def. 9].

Por consiguiente, se ha trazado sobre la recta dada ΑΒ el sólido paralelepípedo ΑΛ semejante y situado de manera semejante al dado ΓΔ. Q. E. F.

Proposición 28

Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.

Córtese, pues, el sólido paralelepípedo ΑΒ por el plano ΓΔΕΖ según las diagonales ΓΖ, ΔΕ de sus planos opuestos.



Digo que el sólido ΑΒ será dividido en dos partes iguales por el plano ΓΔΕΖ.

Pues como el triángulo ΓΗΖ es igual al triángulo ΓΖΒ [I 34] y el (triángulo) ΑΔΕ al ΔΕΘ, mientras que el paralelogramo ΓΑ es también igual al (paralelogramo) ΕΒ: porque son opuestos; y ΗΕ (es igual) a ΓΘ, entonces el prisma comprendido por los dos triángulos ΓΗΖ, ΑΔΕ y los tres paralelogramos ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ es también igual al prisma comprendido por los dos triángulos ΓΖΒ, ΔΕΘ y los tres paralelogramos ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ: porque son comprendidos por planos iguales en número y tamaño. De modo que el sólido entero ΑΒ ha sido dividido en dos partes iguales por el plano ΓΔΕΖ. Q. E. D.[59].

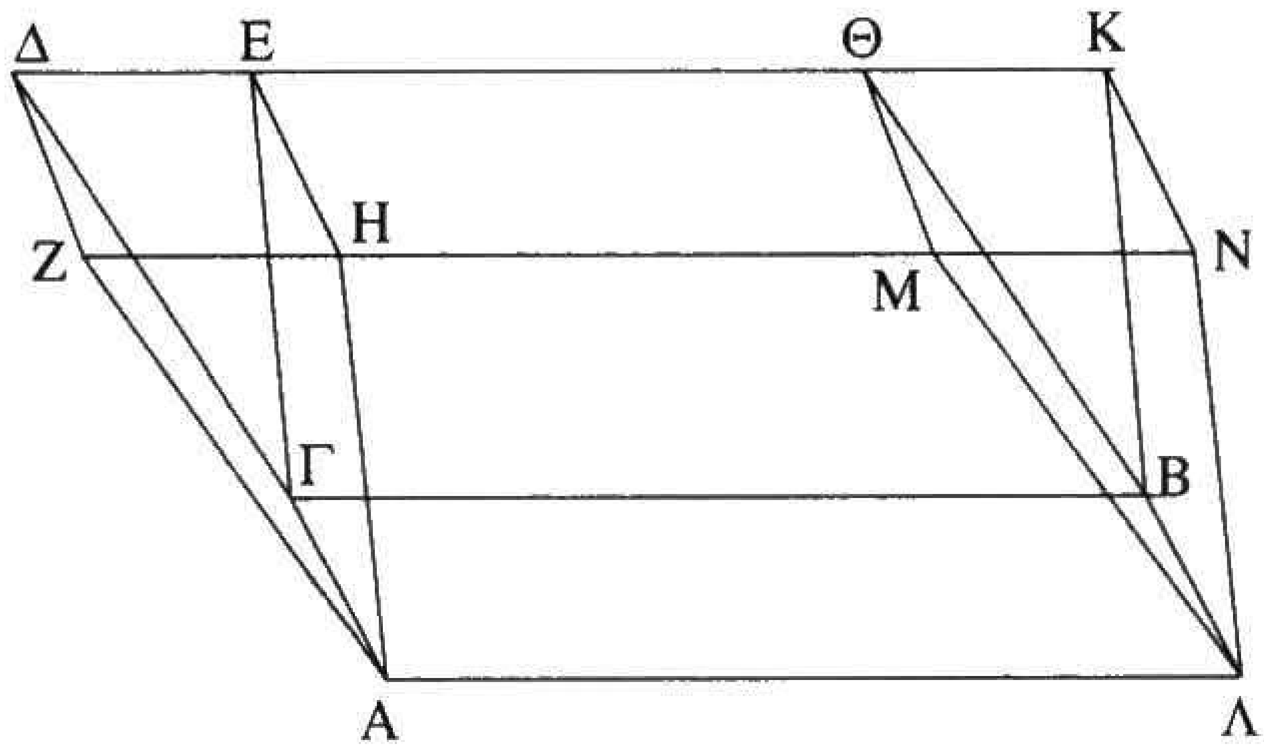
Proposición 29

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura, y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí[60].

Estén sobre la misma base AB y tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos ΓM, ΓN en los que (los extremos de) las aristas laterales AH, AZ, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK están en las mismas rectas ZN, ΔK.

Digo que el sólido ΓM es igual al sólido ΓN.

Pues como cada una de las (figuras) ΓΘ, ΓK es un paralelogramo, ΓB es igual a cada una de las (rectas) ΔΘ, EK [I 34]; de modo que ΔΘ es igual a EK. Quítese de ambas EΘ; entonces la (recta) restante ΔE es igual a la (recta) restante ΘK. De modo que el triángulo ΔΓE es también igual al triángulo ΘBK [I 8, 4] y el paralelogramo ΔH al paralelogramo ΘN [I 36]. Por lo mismo, el triángulo AZH es también igual al triángulo MΛN. Pero el paralelogramo ΓZ es también igual al paralelogramo BM y el (paralelogramo) ΓH al (paralelogramo) BN: porque son opuestos. Luego el prisma comprendido por los dos triángulos AZH, ΔΓE y los tres paralelogramos AΔ, ΔH, ΓH es igual al prisma comprendido por los dos triángulos MΛN, ΘBK y los tres paralelogramos BM, ΘN, BN. Añádase a uno y otro el sólido cuya base es el paralelogramo AB y su (plano) opuesto HEΘM; entonces el sólido paralelepípedo entero ΓM es igual al sólido paralelepípedo entero ΓN.

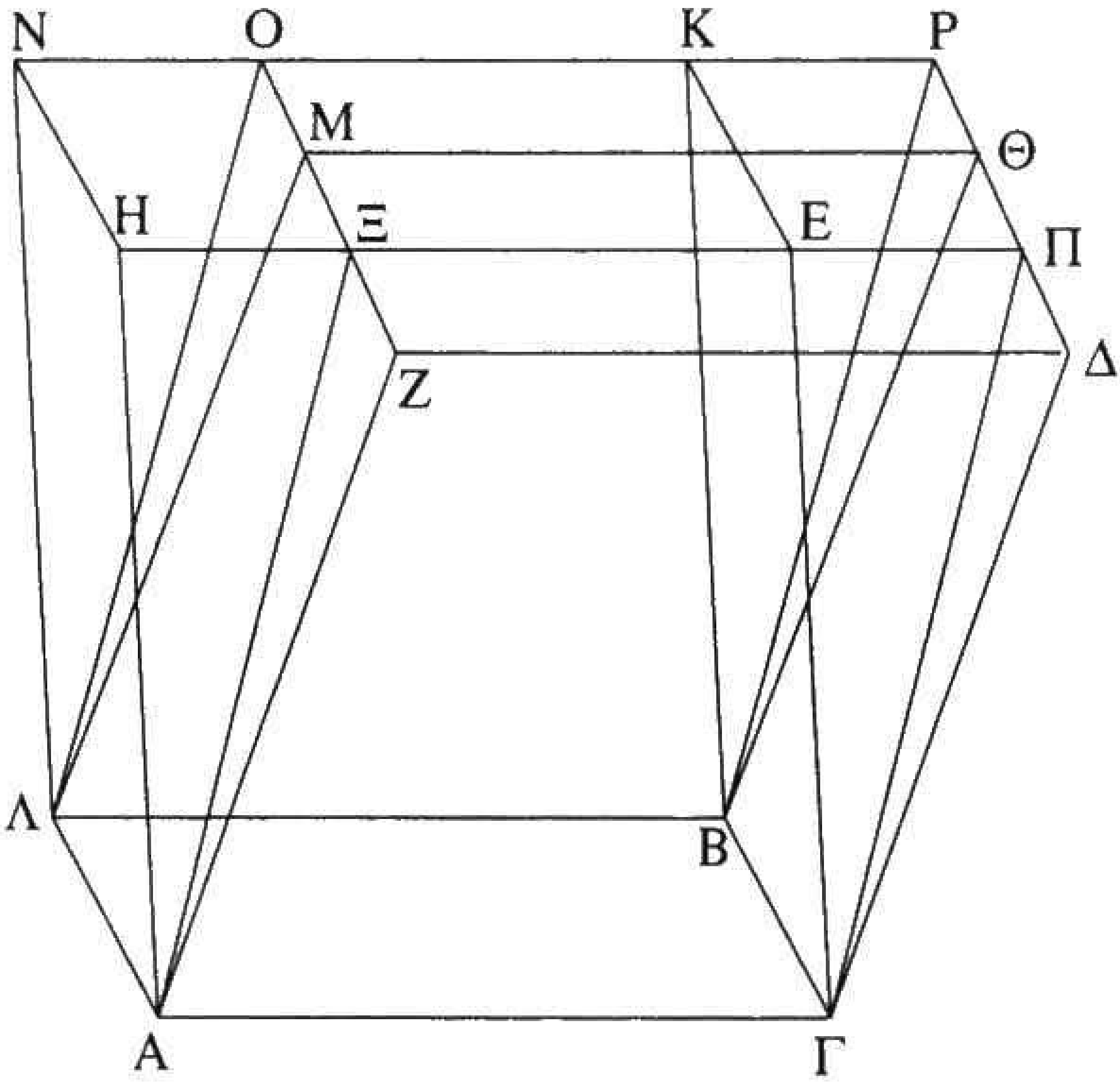


Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí. Q. E. D.

Proposición 30

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales entre sí.

Estén sobre la misma base, AB, y tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos ΓΜ, ΓΝ en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ no están en las misma rectas.



Digo que el sólido ΓΜ es igual al sólido ΓΝ.

Prolónguense ΝΚ, ΔΘ y únanse en Ρ y además Prolónguense ΖΜ, ΗΕ hasta Ο, Π, y trácense ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. Entonces el sólido ΓΜ cuya base es el paralelogramo ΑΓΒΛ y su (plano) opuesto ΖΔΘΜ es igual al sólido ΓΟ cuya base es el paralelogramo ΑΓΒΛ y su (plano) opuesto ΞΠΡΟ: porque están sobre la misma base ΑΓΒΛ y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) las aristas laterales ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ están en las mismas rectas ΖΟ, ΔΡ [XI 29]. Pero el sólido ΓΟ cuya base es el paralelogramo ΑΓΒΛ y su (plano) opuesto ΞΠΡΟ es igual al sólido ΛΝ cuya base es el paralelogramo ΑΓΒΛ y su (plano) opuesto ΗΕΚΝ: porque a su vez está sobre la misma base ΑΓΒΛ y tiene la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ están en las mismas rectas ΗΠ, ΝΡ. De modo que el sólido ΓΜ es también igual al sólido ΓΝ.

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales. Q. E. D.

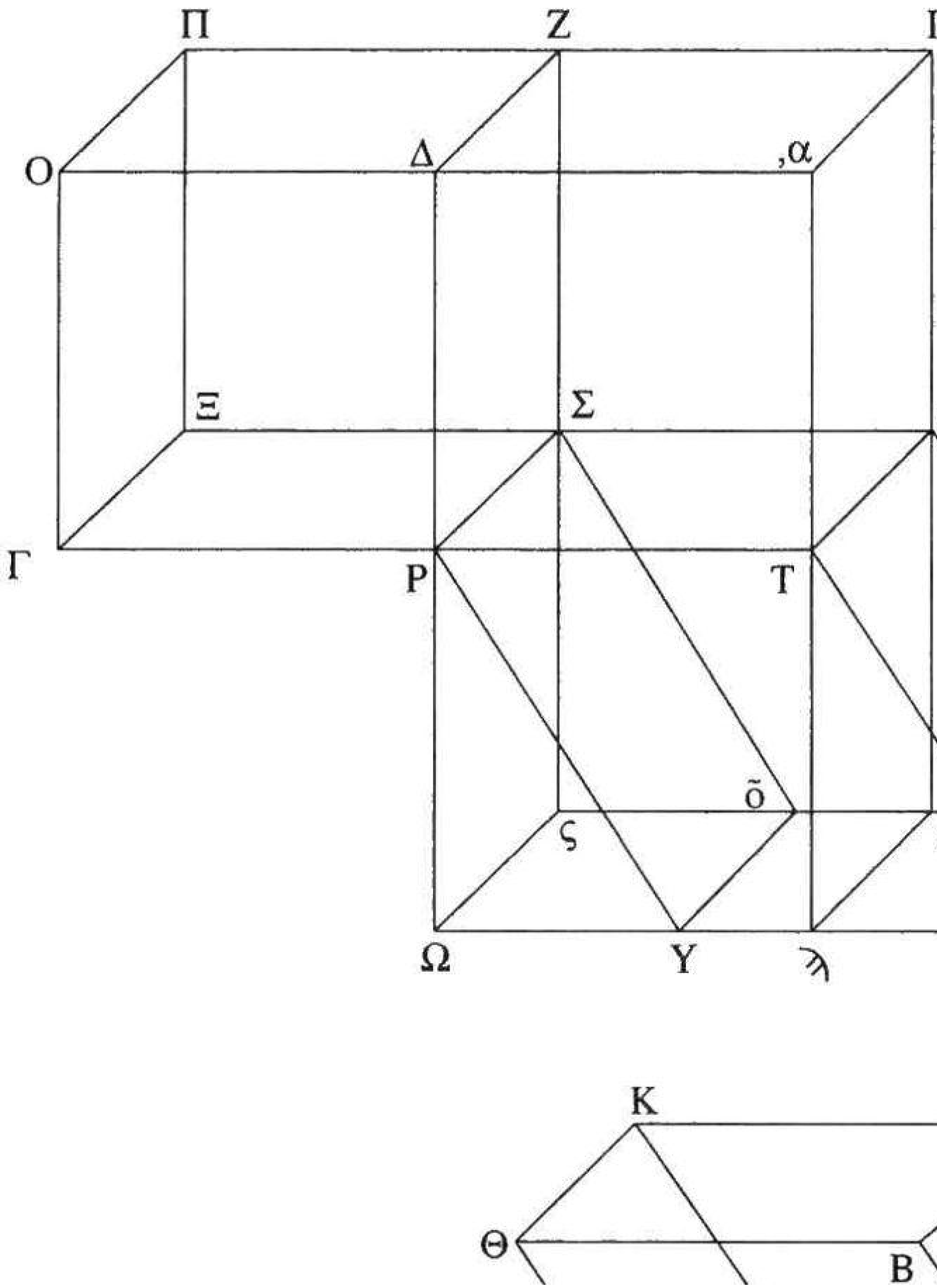
Proposición 31

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí.

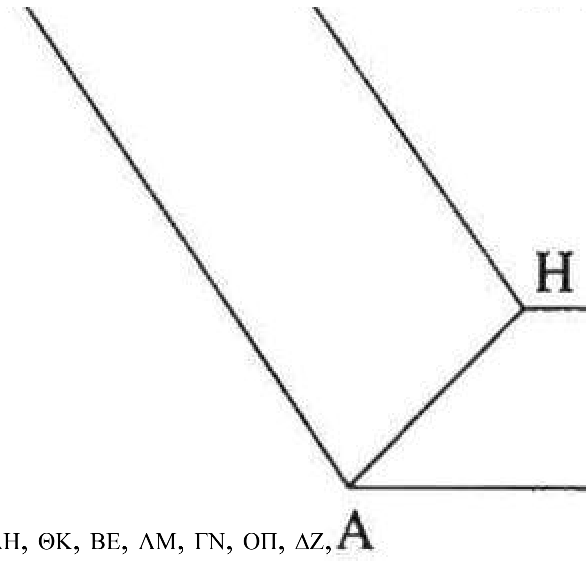
Estén los sólidos paralelepípedos ΑΕ, ΓΖ sobre las bases iguales ΑΒ, ΓΔ, y tengan la misma altura.

Digo que el sólido ΑΕ es igual al sólido ΓΖ.

Formen ángulos rectos, en primer lugar, las aristas laterales ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ con las bases ΑΒ, ΓΔ y sea ΡΤ el resultado de prolongar en línea recta la recta ΓΡ, y constrúyase en la recta ΡΤ y en su punto Ρ el (ángulo) ΤΡΥ igual al (ángulo) ΑΛΒ [I 23]; hágase ΡΤ igual a ΑΛ y ΡΥ igual a ΛΒ y complétese la base ΡΧ y el sólido ΨΥ. Pues bien, como las dos (rectas) ΤΡ, ΡΥ son iguales a las dos (rectas) ΑΛ, ΛΒ y comprenden ángulos iguales, entonces el paralelogramo ΡΧ es igual y semejante al paralelogramo ΘΛ. Y como ΑΛ es a su vez igual a ΡΤ y ΛΜ a ΡΣ, y comprenden ángulos rectos, entonces el paralelogramo ΡΨ es igual y semejante al paralelogramo ΑΜ. Por lo mismo, el (paralelogramo) ΛΕ es igual y semejante al (paralelogramo) ΣΥ; luego tres paralelogramos del sólido ΑΕ son iguales y semejantes a tres paralelogramos del sólido ΨΥ. Pero los tres primeros son iguales y semejantes a los tres opuestos y los otros tres a los tres opuestos [XI 24]; luego el sólido paralelepípedo entero ΑΕ es igual al sólido paralelepípedo entero ΨΥ [XI Def. 10]. Trácense ΔΡ, ΧΥ y encuéntrense en el (punto) Ω, y a través de Τ, trácese ͵αΤϡ paralela a ΔΩ, y prolónguese ΟΔ hasta ͵α, y complétense los sólidos ΩΨ, ΡΙ. Entonces el sólido ΨΩ cuya base es el paralelogramo ΡΨ y su (cara) opuesta ΩϚ es igual al sólido ΨΥ cuya base es el paralelogramo ΡΨ y su (cara) opuesta ΥΦ: porque están sobre la misma base ΡΨ y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales ΡΩ, ΡΥ, Τϡ, ΤΧ, Σς, ΣÕ, ΨϚ, ΨΦ están sobre las mismas rectas ΩX, ςΦ [XI 29]. Pero el sólido ΨY es igual al sólido AE. Luego el sólido ΨΩ es también igual al sólido AE. Ahora bien, como el paralelogramo PYXT es igual al paralelogramo ΩT −porque están sobre la misma base, PT, y entre las mismas paralelas PT ΩX [I 35]− mientras que el (paralelogramo) PYXT es igual al (paralelogramo) ΓΔ −porque es igual también a AB−, entonces el (paralelogramo) ΩT es también igual al (paralelogramo) ΓΔ. Pero ΔT es otro (paralelogramo); luego, como la base ΓΔ es a ΔT, así ΩT a ΔT [V 7]. Ahora bien, puesto que el sólido paralelepípedo ΓI ha sido cortado por el plano PZ, que es paralelo a los planos opuestos, como la base ΓΔ es a la base ΔT, así el sólido ΓZ al sólido PI [XI 25]. Por lo mismo, puesto que el sólido paralelepípedo ΩI ha sido cortado por el plano PΨ que es paralelo a los planos opuestos, como la base ΩT es a la base TΔ, así el sólido ΩΨ al (sólido) PI [XI 25]. Pero como la base ΓΔ es a la base ΔT, así ΩT a ΔT; entonces, como el sólido ΓZ es al sólido PI, así el sólido ΩΨ al sólido PI [V 11]. Luego cada uno de los sólidos ΓZ, ΩΨ guarda la misma razón con PI; así pues, el sólido ΓZ es igual al sólido ΩΨ [V 9]. Pero se ha demostrado que ΩΨ es igual a AE; por tanto, AE es también igual a ΓZ.



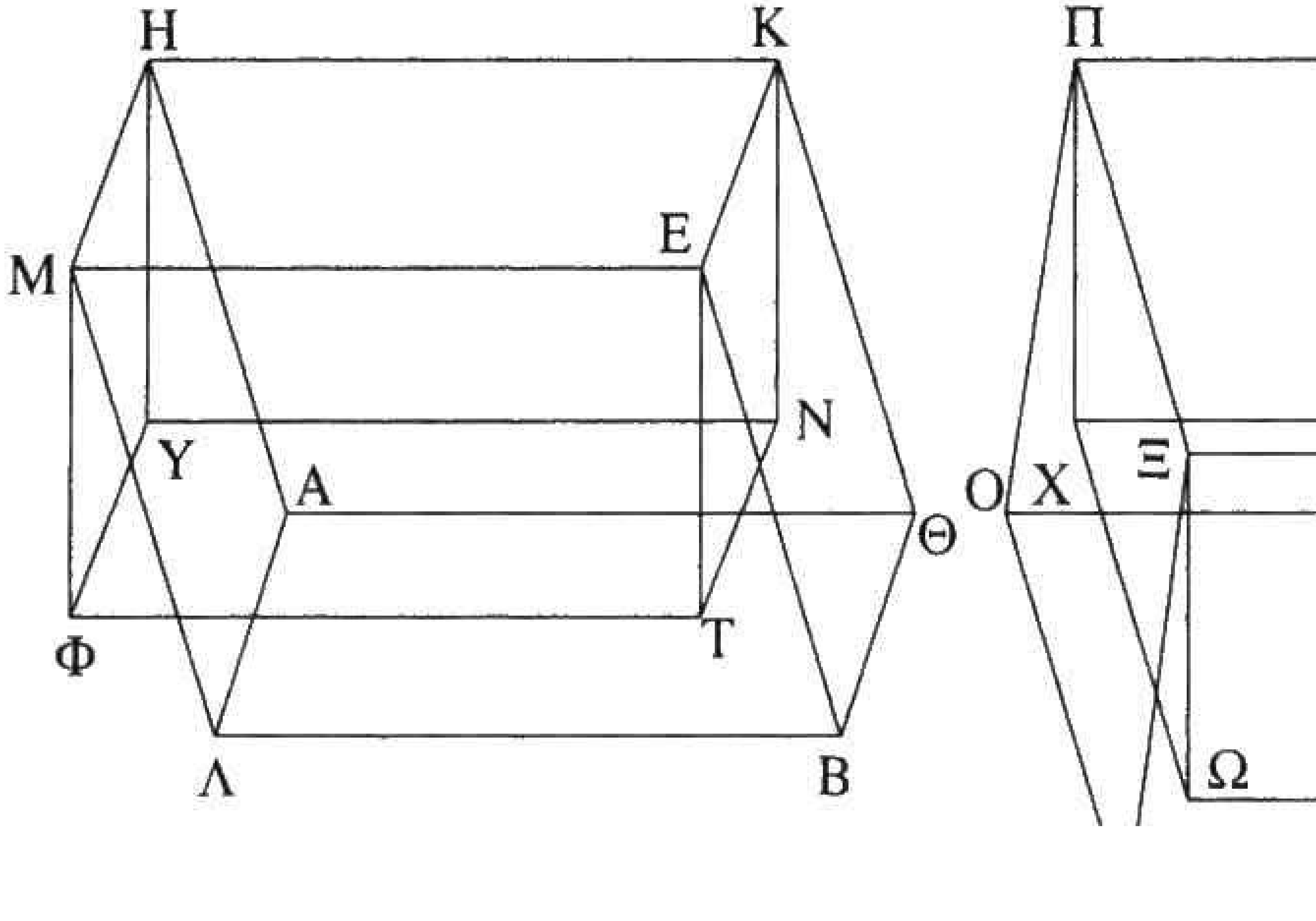
Π
Z
O
Δ
,α
Ξ
Σ
Γ
P
T
õ
ς
Ω
Y
K
Θ
B



Ahora no formen ángulos rectos las aristas laterales ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ con las bases ΑΒ, ΓΔ.

Digo una vez más que el sólido ΑΕ es igual al sólido ΓΖ.

Pues trácense desde los puntos Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ hasta el plano de referencia las perpendiculares ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, y únanse con el plano en los puntos Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι. y trácense ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. Entonces el sólido ΚΦ es igual al sólido ΠΙ: porque están sobre las bases iguales ΚΜ, ΠΣ y tienen la misma altura y sus aristas laterales forman ángulos rectos con las bases [1ª parte de la proposición]. Pero el sólido ΚΦ es igual al sólido ΑΕ, y el (sólido) ΠΙ al (sólido) ΓΖ: porque están sobre la misma base y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales no están sobre las mismas rectas [XI 30]. Luego el sólido ΑΕ es igual al sólido ΓΖ.



Por consiguiente, los sólidos paralelogramos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí. Q. E. D.

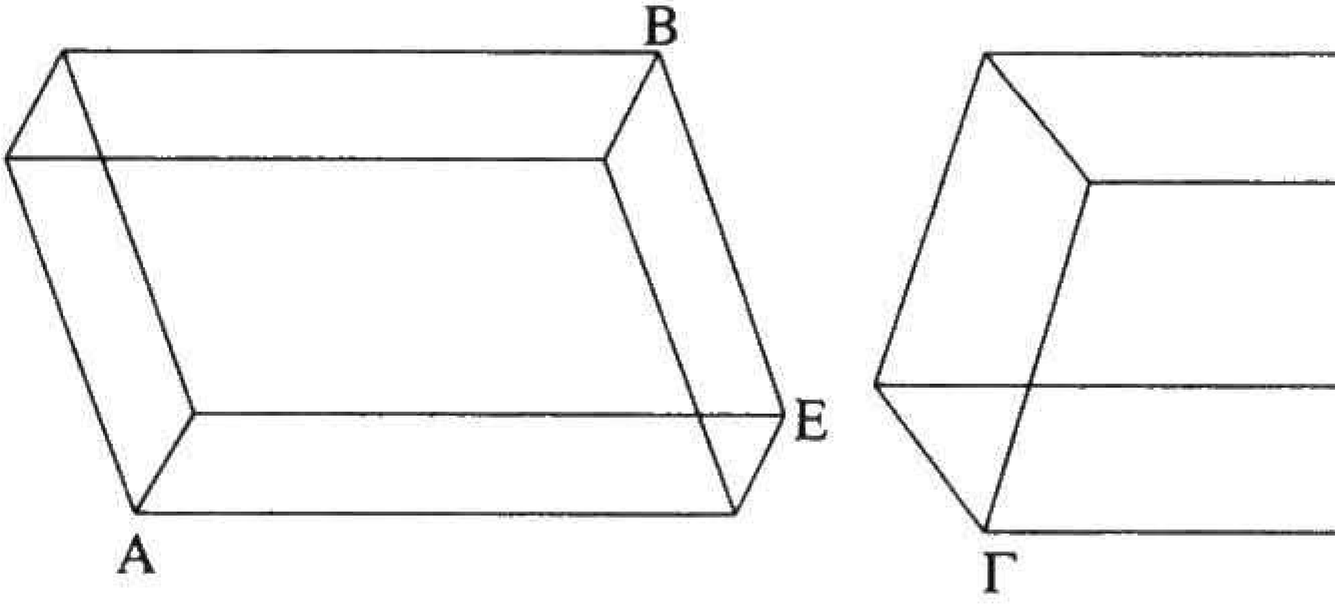
Proposición 32

Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ.

Digo que los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ son entre sí como sus bases, es decir que como la base AE es a la base ΓZ, así el sólido AB al sólido ΓΔ.

Aplíquese, pues, a la (recta) ZH el (paralelogramo) ZΘ igual a AE [I 45], y a partir de la base ZΘ y de la misma altura que la de ΓΔ complétese el sólido paralelepípedo HK. Entonces el sólido AB es igual al sólido HK: porque están sobre bases iguales AE, ZΘ y (tienen) la misma altura [XI 31]. Y puesto que el sólido paralelepípedo ΓK ha sido cortado por el plano ΔH que es paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base ΓZ es a la base ZΘ, así el sólido ΓΔ al sólido ΔΘ [XI 25]. Pero la base ZΘ es igual a la base AE y el sólido HK al sólido AB; luego, como la base AE es a la base ΓZ, así el sólido AB al sólido ΓΔ.



Por consiguiente, los solidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. Q. E. D.

Proposiciód 33

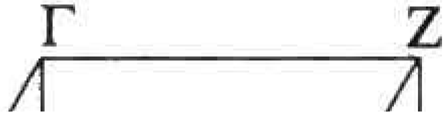
Los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

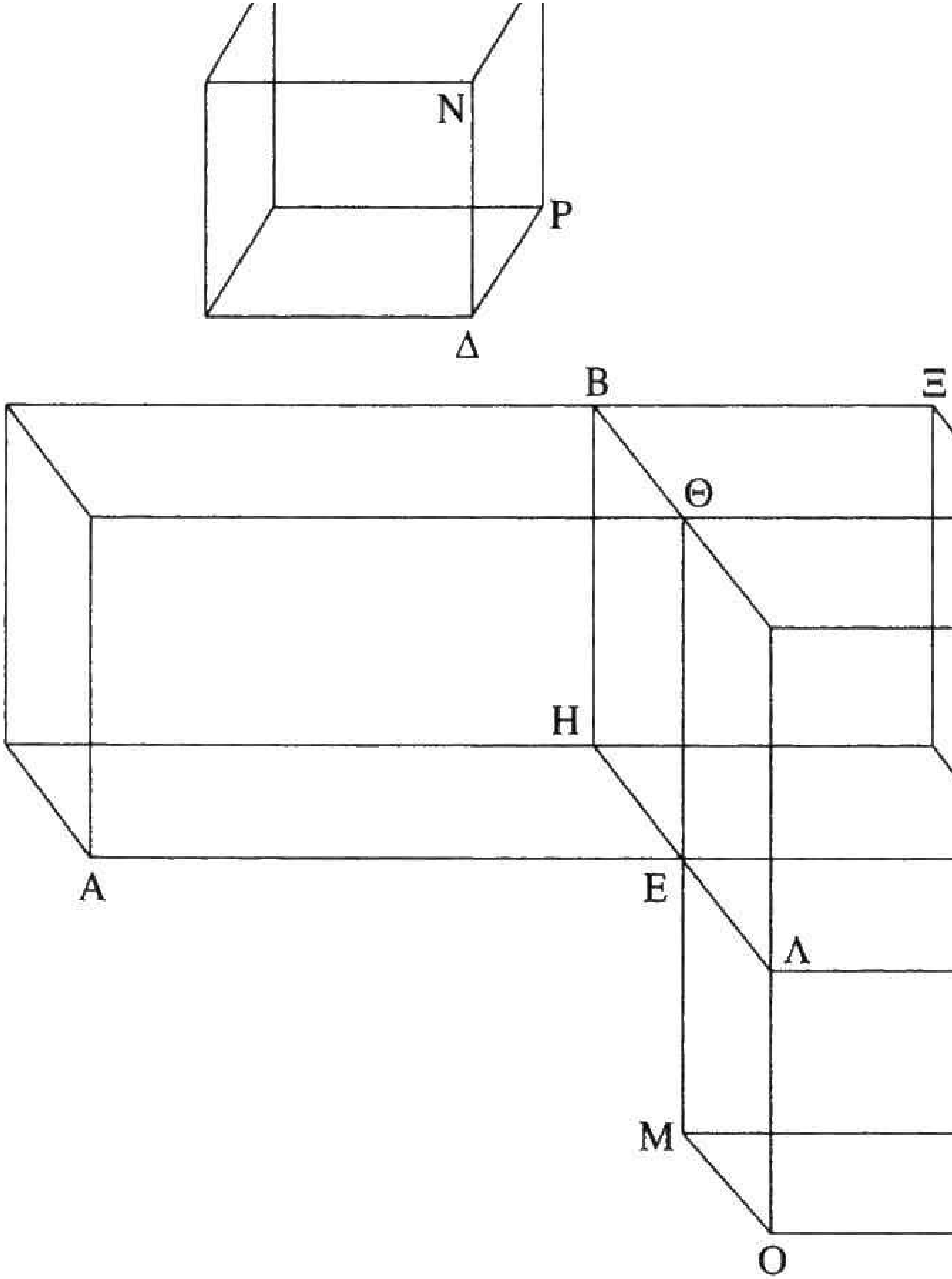
Sean AB, ΓΔ sólidos paralelepípedos semejantes y sea el (lado) AE correspondiente al (lado) ΓZ.

Digo que el sólido AB guarda con el sólido ΓΔ una razón triplicada de la que el (lado) AE (guarda con) el (lado) ΓZ.

Sean EK, EΛ, EM el resultado de prolongar en línea recta las (rectas) AE, HE, ΘE; hágase EK igual a ΓZ, EΛ igual a ZN, y además EM igual a ZP; y complétense el paralelogramo KΛ y el sólido KO.

Ahora bien, como los dos (lados) KE, EΛ son iguales a los dos (lados) ΓZ, ZN, mientras que el ángulo KEΛ es igual al ángulo ΓZN: porque también el (ángulo) AEH es igual al (ángulo) ΓZN por la semejanza de los sólidos AB, ΓΔ; entonces el paralelogramo KΛ es igual al paralelogramo ΓN. Por lo mismo el paralelogramo KM es también igual y semejante al (paralelogramo) ΓP y además el (paralelogramo) EO al ΔZ; luego tres paralelogramos del sólido KO son iguales y semejantes a tres paralelogramos del sólido ΓΔ. Pero los tres primeros son iguales y semejantes a sus tres opuestos y los otros tres a sus opuestos [XI 24]; luego el sólido entero KO es igual y semejante al sólido entero ΓΔ [XI Def. 10]. Complétese el paralelogramo HK y, tomando como bases los paralelogramos HK, KΛ y con la misma altura que la de AB, complétense los sólidos EΞ, ΛΠ. Y puesto que, por la semejanza de los sólidos AB, ΓΔ, como AE es a ΓZ, así EH a ZN y EΘ a ZP, mientras que ΓZ es igual a EK, ZN a EΛ y ZP a EM, entonces, como AE es a EK, así HE a EΛ y ΘE a EM. Pero como AE es a EK, así el (paralelogramo) AH al paralelogramo HK, mientras que, como HE es a EΛ, así HK a KΛ, y como ΘE es a EM, así ΠE a KM [VI 1]; luego también, como el (paralelogramo) AH es al HK, así el (paralelogramo) HK al (paralelogramo) KΛ y el (paralelogramo) ΠE al (paralelogramo) KM. Pero como el (paralelogramo) AH es al (paralelogramo) HK, así el sólido AB al sólido EΞ, mientras que, como el (paralelogramo) HK es al (paralelogramo) KΛ, así el sólido ΞE al sólido ΠΛ, y como el (paralelogramo) ΠE es al (paralelogramo) KM, así el sólido ΠΛ al sólido KO [XI 32]; luego, como el sólido AB es al sólido EΞ, así el (sólido) EΞ al (sólido) ΠΛ y el (sólido) ΠΛ al (sólido) KO. Pero si cuatro magnitudes están en proporción continua, la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda [V Def. 10]; luego el sólido AB guarda con el sólido KO una razón triplicada de la que AB guarda con EΞ. Pero como el (sólido) AB es al (sólido) EΞ, así el paralelogramo AH al (paralelogramo) HK y la recta AE a la recta EK [VI 1]; de modo que el sólido AB guarda con el sólido KO una razón triplicada de la que AE guarda con EK. Ahora bien, el sólido KO es igual al sólido ΓΔ, y la recta EK a la (recta) ΓZ; por tanto, el sólido AB guarda con el sólido ΓΔ una razón triplicada de la que su lado correspondiente AE guarda con el lado correspondiente ΓZ.




N
P
Δ
B
Ξ
Θ
H
A
E
Λ
M
O

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes. Q. E. D.

Porisma:

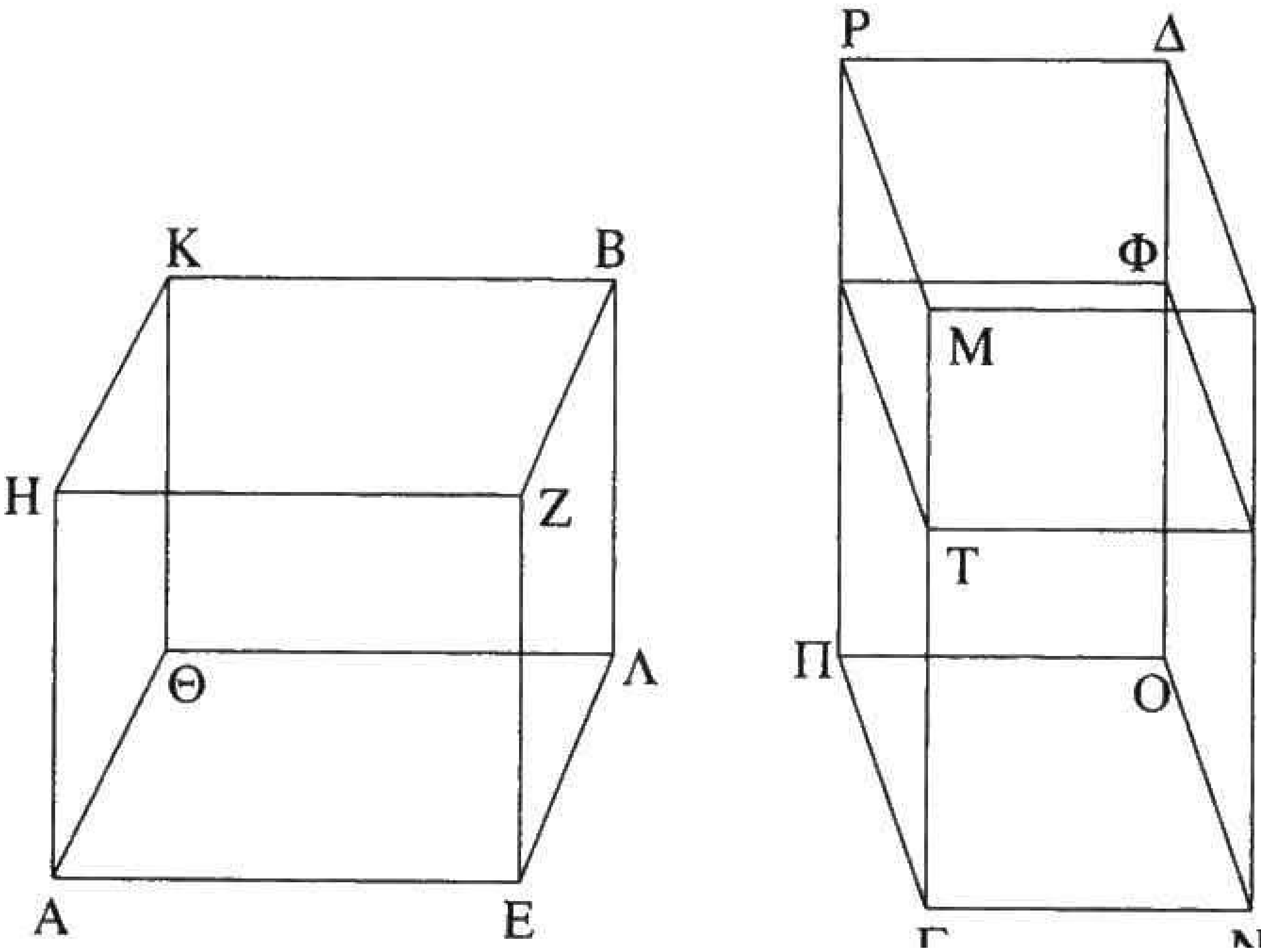
A partir de esto queda claro que, si cuatro rectas son ⟨continuamente⟩ proporcionales, como la primera es a la cuarta, así el sólido paralelepípedo (construido) a partir de la primera al semejante y construido de manera semejante sobre la segunda, porque también la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda[61].

Proposición 34

Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas; y aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Sean AB, ΓΔ sólidos paralelepípedos iguales.

Digo que las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que) como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.



Formen, pues, en primer lugar, ángulos rectos con sus bases las aristas laterales AH, EZ, AB, ΘK, ΓM, NΞ, OΛ, ΠP.

Digo que como la base EΘ es a la base NΠ, así ΓM a AH.

Así pues, si la base EΘ es igual a la base NΠ y el sólido AB es igual al sólido ΓΔ, ΓM será también igual a AH; porque los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XI 32]. Y como la base EΘ es a la (base) NΠ, así ΓM a AH, y está claro que las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Ahora no sea igual la base EΘ a la base NΠ, sino que es mayor EΘ. Pero el sólido AB es igual al sólido ΓΔ, entonces ΓM es también mayor que AH. Así pues, hágase ΓT igual a AH y complétese, sobre la base NΠ y con la altura ΓT, el sólido paralelepípedo ΦΓ. Y como el sólido AB es igual al sólido ΓΔ y el (sólido) ΓΦ está fuera y las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) [V 7], entonces, como el sólido AB es al sólido ΓΦ, así el sólido ΓΔ al sólido ΓΦ. Pero como el sólido AB es al sólido ΓΦ, así la base EΘ a la base NΠ: porque los sólidos AB, ΓΦ son de la misma altura [XI 32]; pero como el sólido ΓΔ es al sólido ΓΦ, así la base MΠ a la base TΠ [XI 25] y ΓM a ΓT [VI 1]; luego como la base EΘ es a la base NΠ, así MΓ a ΓT. Pero ΓT es igual a AH; entonces, como la base EΘ es a la base NΠ, así MΓ a AH. Luego las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con las alturas.

Estén, ahora, las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que) como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.

Digo que el sólido AB es igual al sólido ΓΔ.

Formen, a su vez, las aristas laterales ángulos rectos con las bases. Y si la base EΘ es igual a la base NΠ, y como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB, entonces la altura del sólido ΓΔ es igual a la altura del sólido AB. Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí [XI 31]: luego el sólido AB es igual al sólido ΓΔ.

Ahora no sea la base EΘ igual a la base NΠ, sino que EΘ sea mayor. Entonces la altura del sólido ΓΔ es también mayor que la altura del sólido AB, es decir ΓM (mayor) que AH. Hágase de nuevo ΓT igual a AH, y complétese de manera semejante el sólido ΓΦ. Y puesto que, como la base EΘ es a la base NΠ, así MΓ a AH, y AH es igual a ΓT, entonces, como la base EΘ es a la base NΠ, así ΓM a ΓT. Pero como la (base) EΘ es a la base NΠ, así el sólido AB al sólido ΓΦ: porque los sólidos AB, ΓΦ son de la misma altura [XI 32], Y como ΓM es a ΓT, así la base MΠ a la base ΠT [VI 1] y el sólido ΓΔ al sólido ΓΦ; y como el sólido AB es al sólido ΓΦ, así el sólido ΓΔ al sólido ΓΦ; luego cada uno de los (sólidos) AB, ΓΔ guarda la misma razón con ΓΦ. Por tanto, el sólido AB es igual al sólido ΓΔ [V 9].

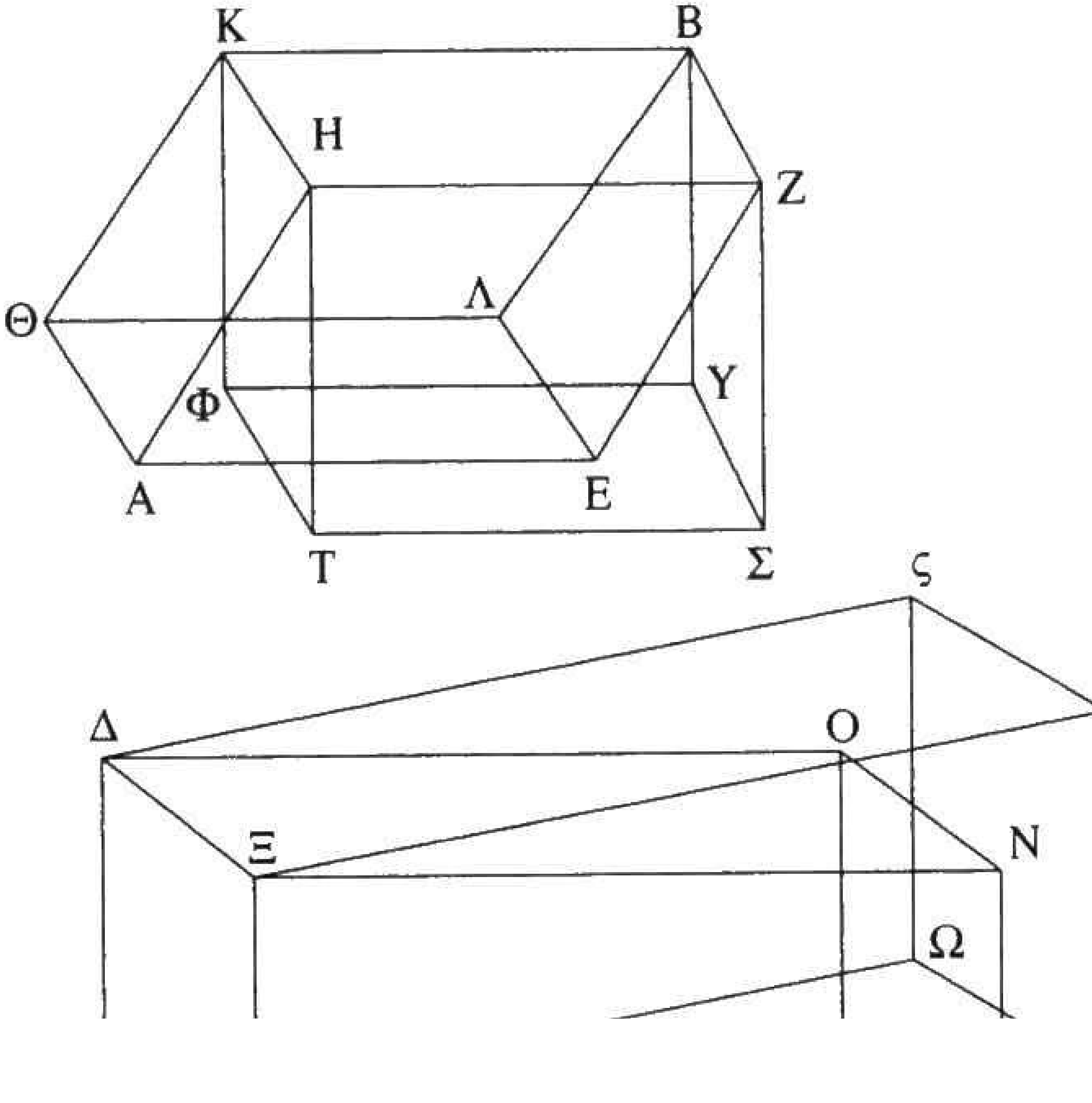
Ahora no formen las aristas laterales ZE, BΛ, HA, ΘK, ΞN, ΔO, MΓ, PΠ ángulos rectos con sus bases y trácense, desde los puntos Z, H, B, K, Ξ, M, Δ, P, perpendiculares a los planos que pasan por EΘ, NΠ, y únanse con los planos en los (puntos) Σ, T, Y, Φ, X, Ω, Ψ, ς, y complétense los sólidos ZΦ, ΞΩ.

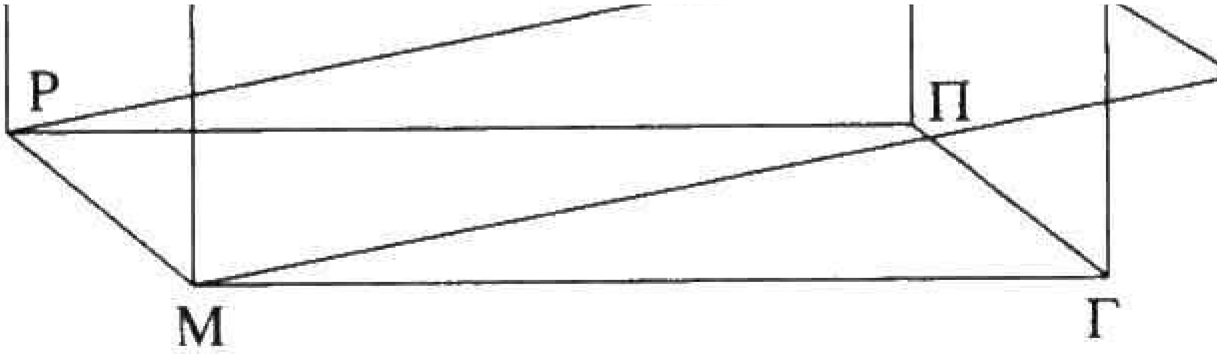
Digo que también en este caso, si los sólidos AB, ΓΔ son iguales, sus bases están inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que) como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.

Puesto que el sólido AB es igual al sólido ΓΔ, mientras que AB es igual a BT: porque están sobre la misma base, ZK, y tienen la misma altura [XI 29, 30]; pero el sólido ΓΔ es igual al sólido ΔΨ: porque están, a su vez, sobre la misma base ΡΞ y tienen la misma altura [id.]. Entonces, el sólido BT es igual al sólido ΔΨ; por tanto, como la base ZK es a la base ΞΡ, así la altura del sólido ΔΨ a la altura del sólido BT [1ª parte]. Pero la base ZK es igual a la base EΘ y la base ΞΡ a la base NΠ; entonces, como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΔΨ a la altura del sólido BT. Pero las alturas de los sólidos ΔΨ, BT son las mismas que las de ΔΓ, BA; luego como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΔΓ a la altura del sólido AB. Por tanto, las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Ahora estén inversamente relacionadas con sus alturas las bases de los sólidos AB, ΓΔ (es decir que) como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.

Digo que el sólido AB es igual al sólido ΓΔ.





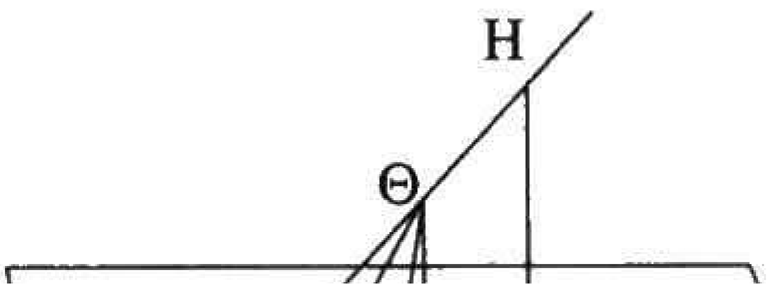
Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base ΕΘ es a la base ΝΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido ΑΒ, y la base ΕΘ es igual a la base ΖΚ, mientras que la (base) ΝΠ es igual a la base ΞΡ, entonces, como la base ΖΚ es a la base ΞΡ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido ΑΒ. Pero los sólidos ΑΒ, ΓΔ y los sólidos ΒΤ, ΔΨ tienen las mismas alturas (respectivamente), entonces, como la base ΖΚ es a la base ΞΡ, así la altura del sólido ΔΨ es a la altura del sólido ΒΤ. Luego las bases de los sólidos paralelepípedos ΒΤ, ΔΨ están inversamente relacionadas con sus alturas. Por tanto, el sólido ΒΤ es igual al sólido ΔΨ [1ª parte]. Pero el (sólido) ΒΤ es igual al sólido ΒΑ: porque están sobre la misma base, ΖΚ, y tienen la misma altura [XI 29, 30]. Y el sólido ΔΨ es igual al sólido ΓΔ [id.].

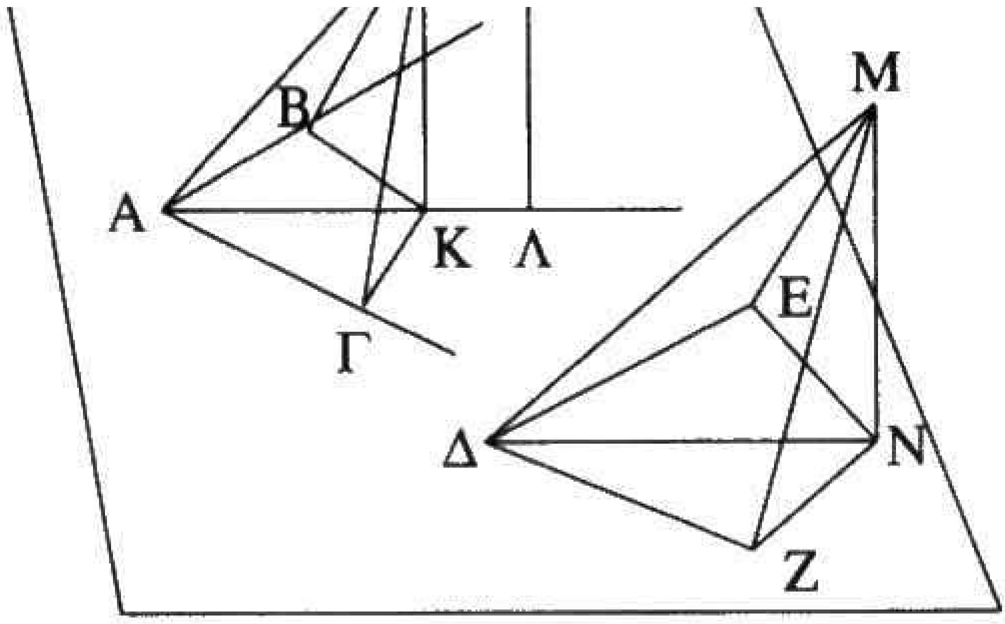
Por consiguiente, el sólido ΑΒ es igual al sólido ΓΔ. Q. E. D.[62].

Proposición 35

Si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde sus vértices rectas elevadas que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, y se toman unos puntos al azar en las rectas elevadas y, desde ellos, se trazan perpendiculares a los planos en los que están los ángulos iniciales y se trazan rectas de los puntos producidos en los planos a los (vértices de) los ángulos iniciales, (éstos) comprenderán con las rectas elevadas ángulos iguales[63].

Sean ΒΑΓ, ΕΔΖ dos ángulos rectilíneos iguales y levántense desde los puntos Α, Δ, las rectas elevadas ΑΗ, ΔΜ que comprendan con las rectas iniciales ángulos iguales respectivamente, a saber: el (ángulo) ΜΔΕ (igual) al (ángulo) ΗΑΒ y el (ángulo) ΜΔΖ al (ángulo) ΗΑΓ; tómense al azar los puntos Η, Μ en las rectas ΑΗ, ΔΜ, y trácense de los puntos Η, Μ a los planos que pasan por ΒΑΓ, ΕΔΖ, las perpendiculares ΗΛ, ΜΝ y únanse a los planos en los (puntos) Ν, Λ, y trácense ΛΑ, ΝΔ.





Digo que el ángulo HAΛ es igual al ángulo MΔN.

Hágase AΘ igual a ΔM, y trácese por el punto Θ la (recta) ΘK paralela a HΛ. Pero HΛ es perpendicular al plano que pasa por BAΓ; entonces ΘK también es perpendicular al plano que pasa por BAΓ [XI 8]. Trácense desde los puntos K, N las perpendiculares KΓ, NZ, KB, NE a las rectas AB, AΓ, ΔZ, ΔE y trácense ΘΓ, TB, MZ, ZE. Puesto que el (cuadrado) de ΘA es igual a los (cuadrados) de ΘK, KA y los (cuadrados) de KΓ, ΓA son iguales al de KA [I 47], entonces el (cuadrado) de ΘA también es igual a los de ΘK, KΓ, ΓA. Pero el (cuadrado) de ΘΓ es igual a los de ΘK, KΓ [I 47]; entonces el (cuadrado) de ΘA es igual a los de ΘΓ, ΓA. Luego el ángulo ΘΓA es recto [I 48]. Por lo mismo el ángulo ΔZM también es recto. Por tanto, el ángulo AΓΘ es igual al ΔZM. Pero el (ángulo) ΘAΓ es igual al ángulo MΔZ. Luego MΔZ, ΘAΓ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado, el que subtiende uno de los ángulos iguales, es decir: el (lado) ΘA (que es igual) a MΔ; entonces tendrán los lados restantes iguales respectivamente a los lados restantes [I 26]. Por tanto, AΓ es igual a ΔZ. De manera semejante demostraríamos que AB también es igual a ΔE. Pues bien, como AΓ es igual a ΔZ y AB a ΔE, entonces los dos (lados) ΓA, AB son iguales a los dos lados ZΔ, ΔE. Pero el ángulo ΓAB es igual también al ángulo ZΔE; entonces la base BΓ es igual a la base EZ y el triángulo al triángulo y los ángulos restantes a los ángulos restantes [I 4]; por tanto, el ángulo AΓB es igual al ΔZE. Pero el ángulo recto AΓK es igual al (ángulo) recto ΔZN. Entonces el (ángulo) restante BΓK es también igual al (ángulo) restante EZN. Por lo mismo, el (ángulo) ΓBK es igual al (ángulo) ZEN. Luego BΓK, EZN son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado a un lado, el correspondiente a los ángulos iguales, es decir BΓ (que es igual) a EZ; entonces tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26], Luego ΓK es igual a ZN. Pero AΓ es también igual a ΔZ; luego los dos (lados) AΓ, ΓK son iguales a los dos (lados) ΔZ, ZN; y comprenden ángulos rectos. Por tanto, la base AK es igual a la base ΔN [I 4]. Y como AΘ es igual a ΔM, el (cuadrado) de AΘ es igual al (cuadrado) de ΔM. Pero los (cuadrados) de AK, KΘ son iguales al (cuadrado) de AΘ, porque el (ángulo) AKΘ es recto [I 47]; y los (cuadrados) de ΔN, NM son iguales al (cuadrado) de ΔM, porque el ángulo ΔNM es recto [I 47]. Entonces los (cuadrados) de AK, KΘ son iguales a los (cuadrados) de ΔN, NM y de ellos, el (cuadrado) de AK es igual al (cuadrado) de ΔN; luego el (cuadrado) restante de KΘ es igual al (cuadrado) de NM; por tanto, ΘK es igual a MN. Y como los dos (lados) ΘA, AK son iguales a los dos (lados) MΔ, ΔN respectivamente, y se ha demostrado que la base ΘK es igual a la base MN, entonces el ángulo ΘAK es igual al ángulo MΔN [I 8].

Por consiguiente, si hay dos ángulos planos iguales, y lo que sigue del enunciado.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde ellos rectas iguales que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, las perpendiculares trazadas desde (los extremos de) ellas hasta los planos en los que están los ángulos iniciales, son iguales entre sí. Q. E. D.

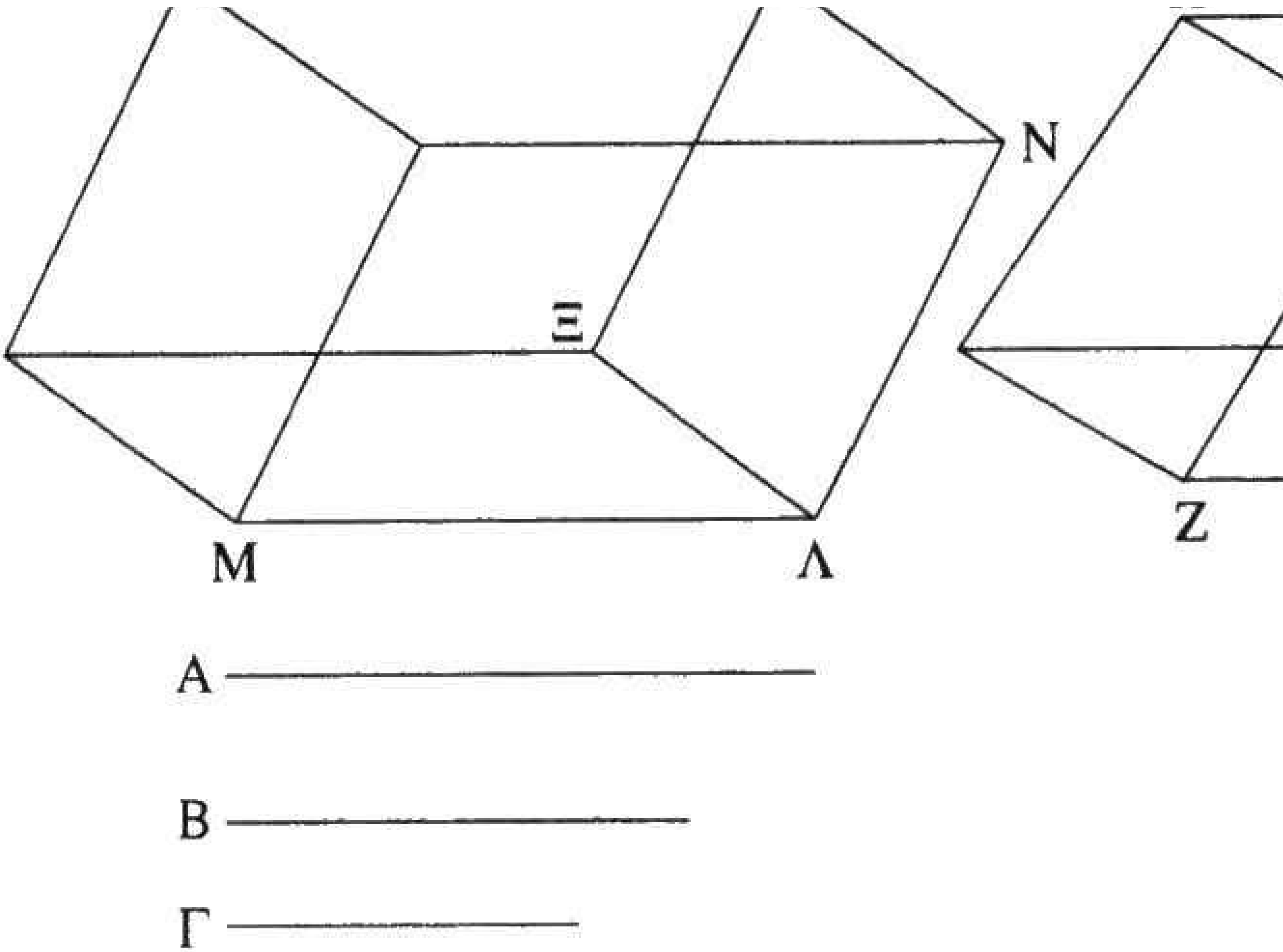
Proposición 36

Si tres rectas son proporcionales, el sólido paralelepípedo (construido) a partir de ellas es igual al sólido paralelepípedo (construido) a partir de la media (proporcional), equilátero y equiangular con el antedicho sólido.

Sean proporcionales las tres rectas A, B, Γ, (es decir que) como A es a B, así B a Γ.

Digo que el sólido (construido) a partir de A, B, Γ es igual al sólido (construido) a partir de B, equilátero y equiangular con el antedicho.

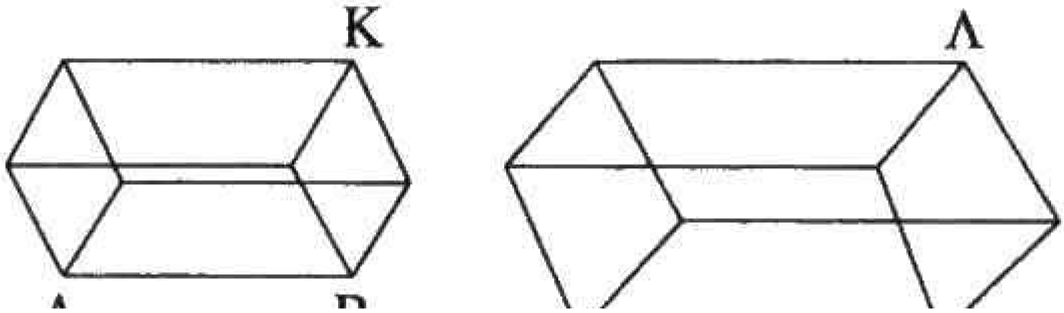
Póngase el ángulo sólido correspondiente a E comprendido por los (ángulos) ΔEH, HEZ, ZEΔ, y háganse las rectas ΔE, HE, EZ iguales a B respectivamente y complétese el sólido paralelepípedo EK; hágase ΛM igual a A y constrúyase sobre la recta ΛM y en su punto Λ un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a E, el comprendido por los (ángulos) NΛΞ, ΞΛM, MΛN; hágase ΛΞ igual a B y ΛN igual a Γ. Y dado que, como A es a B, así B a Γ, y A es igual a ΛM, y B a cada una de las (rectas) ΛΞ, EΔ, y Γ a ΛN; entonces, como ΛM es a EZ, así ΔE a ΛN. Y los lados que comprenden los ángulos iguales NΛM, ΔEZ están inversamente relacionados; entonces, el paralelogramo MN es igual al paralelogramo ΔZ [VI 14]. Ahora bien, como ΔEZ, NΛM son dos ángulos planos rectilíneos iguales y se han levantado sobre ellos las rectas ΔΞ, EH iguales entre sí y que comprenden ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, entonces las perpendiculares trazadas de los puntos H, Ξ a los planos que pasan por NΛM, ΔEZ son iguales entre sí [XI 35 Por.]; de modo que los sólidos ΛΘ, EK tienen la misma altura. Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y (tienen) la misma altura son iguales entre sí [XI 31]; luego el sólido ΘΛ es igual al sólido EK. Y ΛΘ es el sólido (construido) a partir de A, B, Γ, y EK el sólido (construido) a partir de B; por tanto, el sólido paralelepípedo (construido) a partir de A, B, Γ es igual al sólido (construido) a partir de B, equilátero y equiangular con el (sólido) antedicho. Q. E. D.

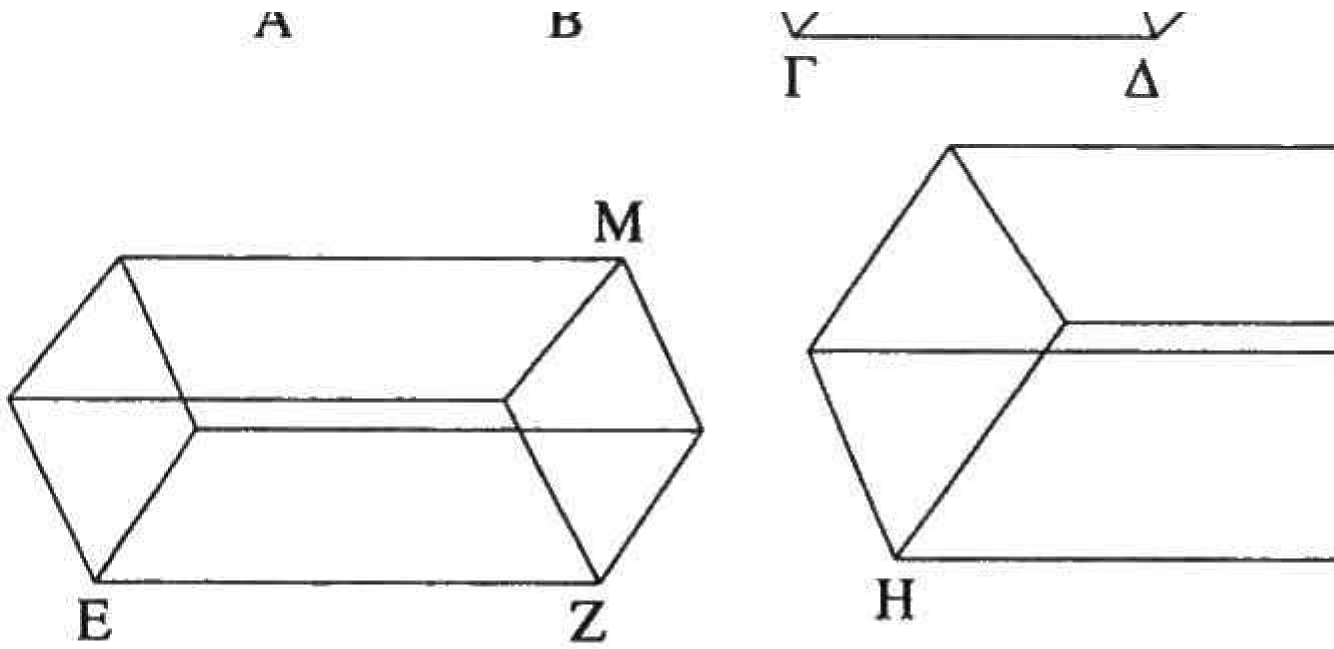


PROPOSICIÓN 37

Si cuatro rectas son proporcionales, los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, también las propias rectas serán proporcionales.

Sean proporcionales las cuatro rectas AB, ΓΔ, EZ, HΘ, (es decir que) como AB es a ΓΔ, así EZ a HΘ, y constrúyanse a partir de AB, ΓΔ, EZ, HΘ los sólidos paralelepípedos KA, ΛΓ, ME, NH semejantes y situados de manera semejante.





Digo que, como ΚΑ es a ΛΓ, así ΜΕ a ΝΗ.

Pues dado que el sólido paralelepípedo ΚΑ es semejante al (sólido paralelepípedo) ΛΓ, entonces ΚΑ guarda con ΛΓ una razón triplicada de la que ΑΒ guarda con ΓΔ [XI 33]. Por lo mismo, ΜΕ guarda con ΝΗ una razón triplicada de la que ΕΖ guarda con ΗΘ [id.]. Y como ΑΒ es a ΓΛ, así ΕΖ a ΗΘ. Entonces, como ΑΚ es a ΛΓ, así ΜΕ a ΝΗ.

Pero ahora, como el sólido ΑΚ es al sólido ΛΓ, sea así el sólido ΜΕ al sólido ΝΗ.

Digo que, como la recta ΑΒ es a la (recta) ΓΔ, así la (recta) ΕΖ a la (recta) ΗΘ.

Pues dado que ΚΑ guarda a su vez con ΛΓ una razón triplicada de la que ΑΒ guarda con ΓΔ [XI 33], y ΜΕ guarda también con ΝΗ una razón triplicada de la que ΕΖ guarda con ΗΘ [id.], y como ΚΑ es a ΛΓ, así ΜΕ a ΝΗ, entonces, como ΑΒ es a ΓΛ, así ΕΖ a ΗΘ.

Por consiguiente, si cuatro rectas son proporcionales y lo que sigue del enunciado. Q. E. D.[64].

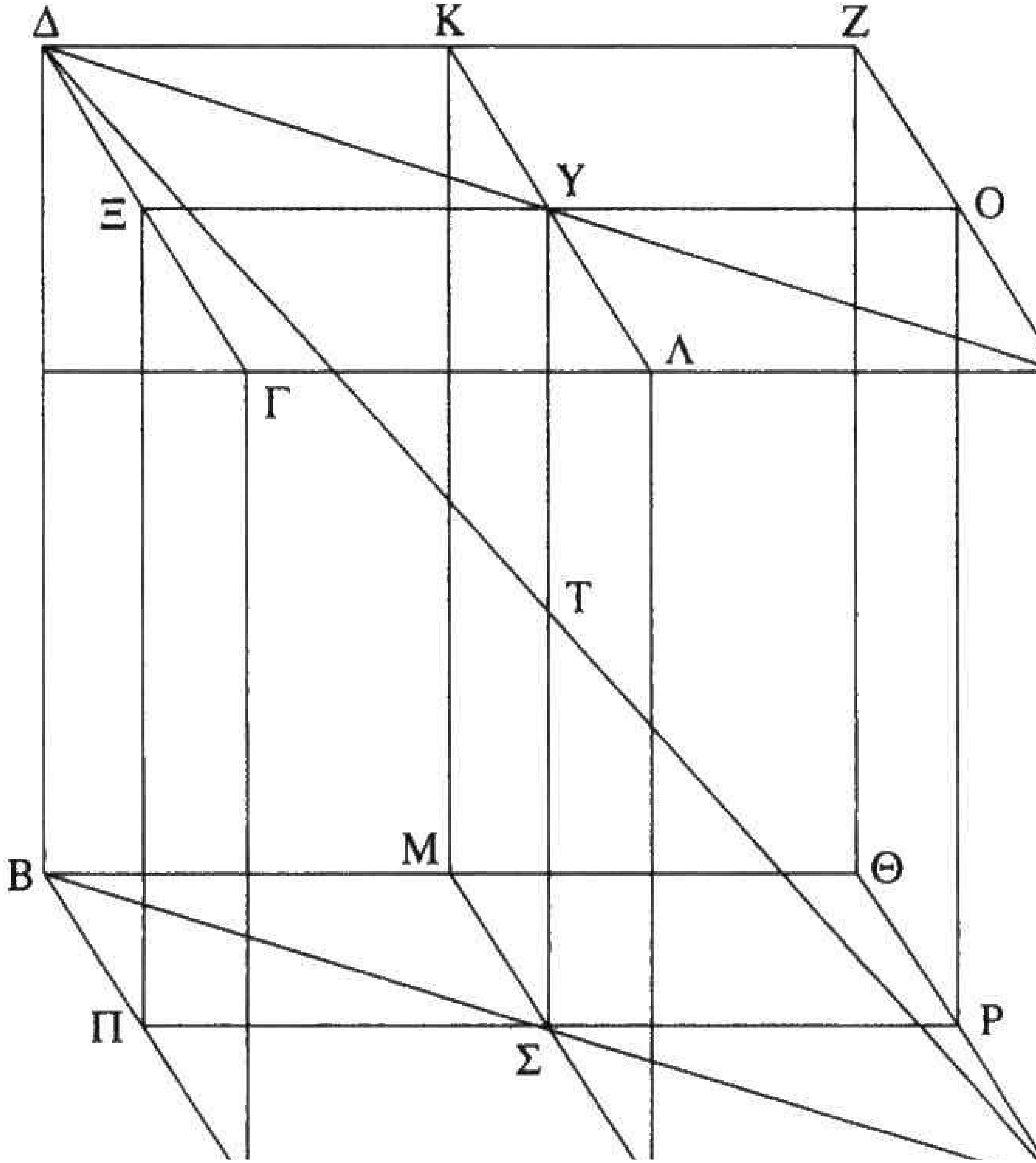
PROPOSICIÓN 38

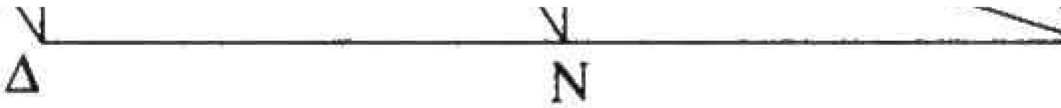
Si los lados de los planos opuestos de un cubo se dividen en dos partes iguales y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales.

Divídanse en dos, pues, los lados de los planos opuestos ΓΖ, ΑΘ, del cubo ΑΖ por los puntos Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, y trácense los planos ΚΝ, ΞΡ a través de las secciones, y sea ΥΣ la sección común y ΔΗ la diagonal del cubo.

Digo que ΥΤ es igual a ΤΣ y ΔΤ a ΤΗ.

Pues trácense ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Y como ΔΞ es paralela a ΟΕ, los ángulos alternos ΔΞΥ, ΥΟΕ son iguales entre sí [I 29]. Y como ΔΞ es igual a ΟΕ y ΞΥ a ΥΟ y comprenden ángulos iguales, entonces la base ΔΥ es igual a la base ΥΕ y el triángulo ΔΞΥ es igual al triángulo ΟΥΕ y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes [I 4]. Luego el ángulo ΞΥΔ es igual al ángulo ΟΥΕ. Por eso ΔΥΞ es una recta [I 14]. Por lo mismo ΒΣΗ es también una recta, y ΒΣ es igual a ΣΗ. Y como ΓΑ es igual y paralela a ΔΒ, mientras que ΓΑ también es igual y paralela a ΕΗ, entonces ΔΒ es igual y paralela a ΕΗ [XI 9]. Y las rectas ΔΕ, ΒΗ las unen; luego ΔΕ es paralela a ΒΗ [I, 33]. Por tanto, el ángulo ΕΔΤ es igual al (ángulo) ΒΗΤ, porque son alternos [I 29]; y el (ángulo) ΔΤΥ es igual al (ángulo) ΗΤΣ [I 15], Entonces ΔΤΥ, ΗΤΣ son dos triángulos que tienen dos ángulos (del uno) iguales a dos ángulos (del otro) y un lado igual a un lado, el que subtiende a uno de los ángulos iguales, ΔΥ (que es igual) a ΗΣ, porque son mitades de ΔΕ, ΒΗ; y tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Por tanto, ΔΤ es igual a ΤΗ y ΥΤ a ΤΣ.



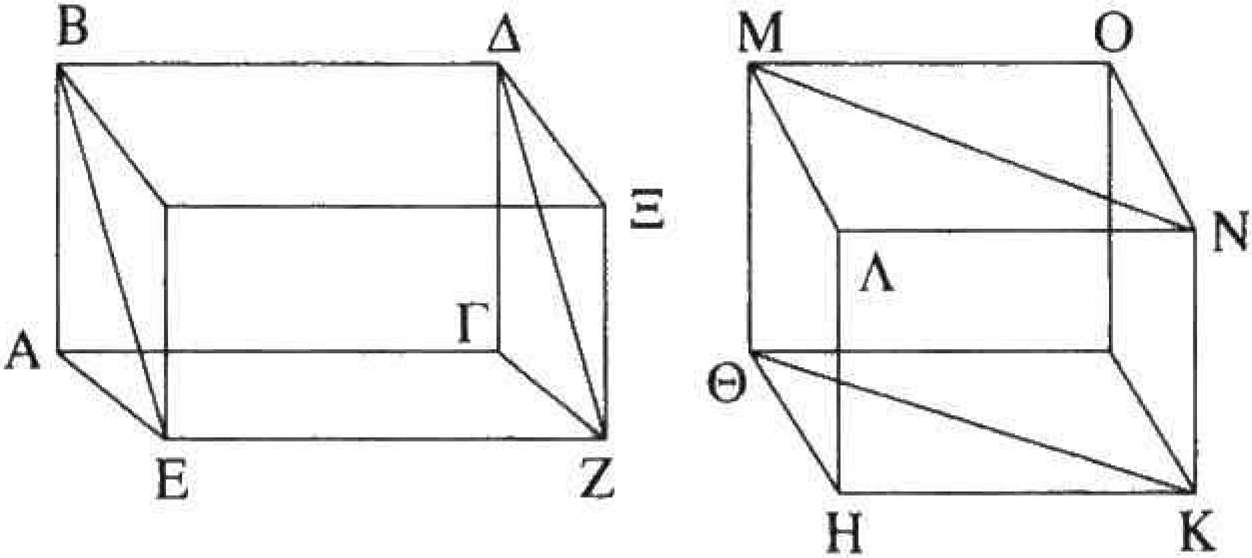


Por consiguiente, si se dividen en dos partes iguales los lados de los planos opuestos de un cubo, y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales. Q. E. D.

Proposición 39

Si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas serán iguales.

Sean ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ dos prismas de la misma altura y tenga el primero como base el paralelogramo ΑΖ, y el segundo el triángulo ΗΘΚ. Y sea el paralelogramo ΑΖ el doble del triángulo ΗΘΚ.



Digo que el prisma ΑΒΓΔΕΖ es igual al prisma ΗΘΚΛΜΝ.

Complétense, pues, los sólidos ΑΞ, ΗΟ. Como el paralelogramo ΑΖ es el doble del triángulo ΗΘΚ, y el paralelogramo ΘΚ el doble del triángulo ΗΘΚ [I 34], entonces el paralelogramo ΑΖ es igual al paralelogramo ΘΚ. Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí [XI 31]; luego el sólido ΑΞ es igual al sólido ΗΟ. Y el prisma ΑΒΓΔΕΖ es la mitad del sólido ΑΞ y el prisma ΗΘΚΛΜΝ, la mitad del sólido ΗΟ [XI 28]; por tanto, el prisma ΑΒΓΔΕΖ es igual al prisma ΗΘΚΛΜΝ.

Por consiguiente, si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas son iguales. Q. E. D.

[43] La definición de sólido es tradicional. La palabra *stereón* «sólido», es un adjetivo que, en geometría, hace referencia a *sôma,* «cuerpo», o *skhêma,* «figura».

PLATÓN, en *Menón* 76a, «una figura es aquello que limita lo sólido», parece identificar *stéreon* con *sôma,* mientras que en Euclides se identifica con *skhêma.* En *Sofista* 235d habla de producir una imitación teniendo en cuenta las proporciones del modelo en largo, ancho y profundo. En *Leyes* 817e coloca entre los tres *mathḗmata* el arte de medir longitud, profundidad y anchura. Según MÜGLER (*Dictionaire de la terminologie geométrique des grecs, op. cit.,* pág 93) Platón se refiere a la tercera dimensión de tres formas: *báthous aúksē, trítē aúksē, ōn kýbō aúksē.* Por otra parte, la palabra *báthos* «profundidad» se aplica en Platón tanto al cuerpo sólido como a la tercera dimensión: *Rep.* 528d «después de la geometría, hablé de la astronomía que implica movimiento de un sólido *(báthous).*

Aristóteles, por su parte, en *Metafísica* 1020a 11-14 dice: «lo continuo en una dirección es longitud, en dos direcciones anchura y en tres profundidad... longitud es una línea, anchura una superficie, profundidad un cuerpo» identificando *báthos* con *sôma.* En *Tópicos* VI 5, 142b 24 «un cuerpo es lo que tiene tres dimensiones» *(diastáseis).* En *Metafísica* 1066b32 «lo que tiene dimensión por todas partes».

Herón (Def. 11) combina las dos formas de definir un sólido: «un cuerpo sólido es el que tiene longitud, anchura y profundidad o el que cuenta con las tres dimensiones».

Teón (pág. 111, 19, ed. Hiller) dice: «lo que es extensible y divisible en tres direcciones es un sólido, que tiene longitud, anchura y profundidad».

[44] Euclides establece una diferencia entre *orthé* «ortogonal», término utilizado para el caso de rectas (o planos) que forman ángulos rectos con un plano, y *prós orthás,* empleado para rectas que forman ángulos rectos con otras rectas en un plano. El término *káthetos,* «perpendicular», se utiliza de un modo más generalizado.

Herón (Def. 115) adopta esta definición y la siguiente casi con las mismas palabras.

Se establece en XI 4 el hecho de que una recta pueda relacionarse con un plano de la forma que se describe en esta definición.

[45] En suma, se trata del ángulo de la recta con su proyección en el plano.

[46] Hoy en día hablaríamos de ángulo diedro.

[47] Herón (115) presenta la misma definición de planos paralelos. El término *asýmptōtos* «no concurrente» se ha utilizado posteriormente para las asíntotas de curvas.

[48] Simson discute la autenticidad de esta definición por dos razones:

En primer lugar, dice que no es una definición sino un teorema que debe ser probado por el método de la superposición o de alguna otra manera, por tanto no debía haberse colocado entre las definiciones. En segundo lugar, porque es falsa, según demuestra con un ejemplo (Cf. SIMSON, *ed. cit.,* págs. 339-41). Considera, entonces, que esta definición ha sido interpolada por Teón o algún otro editor.

Legendre comparte las objeciones de Simson y las amplía a la definición 9 (Cf. HEATH, *op. cit.*, III, págs. 266-67).

Heath sin embargo piensa que las definiciones 9 y 10 se refieren únicamente a figuras compuestas por ángulos sólidos triédricos y en este caso, que es el único que Euclides tiene en cuenta, sus afirmaciones son «verdaderas y admisibles».

Herón define las figuras sólidas semejantes como aquellas que están comprendidas por planos semejantes y situados de manera semejante. En recuerdo del principio de «caridad» que Donald Davidson postula en el mundo de la interpretación, conviene entender que se refiere a poliedros convexos.

[49] Como hace notar el escoliasta, no se trata de una definición propiamente dicha, sino de la descripción del modo de generar una esfera. Pero Euclides define de esta forma la esfera porque utilizará este modo de concebirla en las últimas proposiciones del libro XIII para probar que los vértices de los poliedros regulares tocan la superficie de las esferas que los circunscriben. De hecho, prueba que los vértices de dichas figuras tocan los semicírculos descritos sobre ciertos diámetros de las esferas.

La noción definitoria no genética de esfera es antigua. En ARISTÓTELES, la característica propia de la esfera es que sus extremos distan lo mismo del centro (*Acerca del cielo* II, 14, 297a 24). Herón usa la misma fórmula que Euclides utiliza para definir el círculo: «Una esfera es una figura sólida limitada por una superficie tal que todas las rectas que caen en ella desde un punto interior de la figura son iguales entre sí».

[50] Con estas definiciones del libro XI entramos en el último campo temático de los *Elementos*: la geometría del espacio. El interés de los matemáticos griegos por la geometría de los sólidos («cuerpos» o «figuras») responde

a diversas fuentes de inspiración y de desarrollo. Unas podrían decirse más bien «externas» —en nuestra perspectiva profesionalizada de las matemáticas que nos hace ver demarcaciones entre los miembros de esta familia (e. g. entre geometría y astronomía, entre aritmética y música), que los antiguos griegos no solían marcar —; las otras más bien «internas». Entre las fuentes «externas» cuentan ciertas ideas cosmológicas, en particular la tradición que consideraba los sólidos regulares como encarnación o figura de los «cuerpos cósmicos». En este sentido, es elocuente la conjetura del *Timeo* de Platón acerca de las correspondencias entre los cuatro primeros sólidos y las partículas de los cuatro elementos, es decir: entre la pirámide o tetraedro y el fuego; el cubo o hexaedro y la tierra; el octaedro y el aire; el icosaedro y el agua (*Timeo*, 55e-56b); para colmo, el dodecaedro podía ser la figura del universo mismo. Una tradición neopitagórica, de la que se hace eco AECIO (*Placita*, II 6, 5), atribuye a Pitágoras tanto el conocimiento de los cinco poliedros como su asociación a los elementos y al conjunto del cosmos —raro poder de presciencia el de este Pitágoras, capaz de conocer cosas para las que aún no existen condiciones de conocimiento (e. g. la investigación sobre inconmensurables que subyace en la construcción de los poliedros, en particular del dodecaedro; la «teoría de los elementos» de Empédocles)—. El escolio 1.° del libro XIII pretende, a su vez, que la pirámide, el cubo y el dodecaedro ya habían atraído la atención de los pitagóricos, mientras que el octaedro y el icosaedro habían sido estudiados por Teeteto. Es una pretensión más sensata, pero ambigua, al menos en la medida en que pasa por alto la diferencia entre el hallazgo o el interés por ciertas figuras y la construcción geométrica de los poliedros sobre la base teórica pertinente. En este sentido, fueran cuales fueran los motivos filosóficos o estéticos pitagóricos, la conversión de los poliedros regulares en un asunto geométrico parece deberse sobre todo al trabajo de matemáticos como Teeteto —a quien, por cierto, *Suda* atribuye un escrito sobre estos cinco sólidos (edic. Ginebra, 1619; I 1295, 1-5)—. También revisten especial importancia los planteamientos astronómicos, asociados a modelos cosmológicos, que guiaban el estudio de la geometría esférica. Un hito preeuclídeo singular en esta línea es *La esfera en movimiento* de Autólico de Pitania, el primer tratado matemático-científico griego que hoy se conserva (cf. edic. G. AUJAC, París, 1979). Entre las fuentes o motivos más «internos» cabe mencionar la investigación de medias proporcionales (cf. *Timeo*, 31c-32b), al calor de antiguos problemas como el de la duplicación del cubo; el análisis de magnitudes no expresables racionalmente emprendido por Teeteto y desarrollado en el libro X; los estudios sobre sólidos, como los resultados de Demócrito y de Eudoxo que recuerda Arquímedes y se hallan reflejados en el libro XII (e. g., en las proposiciones 2, 7, 10, 18).

El planteamiento de Euclides es una muestra elocuente no sólo de la madurez de esta tradición clásica de la geometría griega (la tradición Teeteto-Eudoxo), sino de las limitaciones de la matemática griega a la hora de explicitar ciertos supuestos. Euclides, por ejemplo, tiende a pasar del modo más tácito y natural desde los resultados acerca de un plano hasta la solución de problemas que envuelven más de un plano: la geometría de los sólidos no parece requerir ni postulados específicos, ni la explicitación de su relación con la anterior geometría plana. En consecuencia, no aparecen especificadas en los *Elementos* las relaciones entre planos y puntos, planos y líneas, planos y planos. Pero la limitación más sustancial es la de una geometría del espacio que carece de una noción propia y expresa de espacio geométrico —en curioso contraste con la preocupación del pensamiento griego por el espacio cosmológico o por el lugar físico, cf. «Introducción general», *Elementos. Libros I-IV*, págs. 97, 108-110. Por lo demás, esa carencia del debido nivel de abstracción conceptual mal puede suplirse con la mera indicación del carácter tridimensional de las figuras que se van a tratar en este nuevo campo temático.

[51] «Plano de referencia» recoge los dos sentidos posibles del griego *tò hypokeiménon epípedon:* a) el plano que está debajo con respecto a otro más elevado *meteōróteron*, y b) el plano dado o acordado.

Por otra parte, HEATH (*op. cit.*, pág. 272) hace notar que las pruebas de las tres primeras proposiciones del libro XI son insatisfactorias. Buena señal es que Euclides no es capaz de hacer ningún uso de su definición de plano para éstas. En realidad se basa en supuestos sobre planos que debería haber declarado de modo análogo a como había adelantado postulados sobre rectas en el libro I. Algunos de estos postulados tácitos podrían formularse como sigue:

XI 1* Si dos puntos están en un plano también lo está la recta que pasa a través de ellos.
2* Tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta determinan un plano.
3* Si dos planos se cortan, lo hacen en una recta.
4* Para todo plano hay un punto que no está en él. (El propósito general de este supuesto es generar nuevos planos.)

Para más detalles, cf. MUELLER, *Philosophy of Mathematics..., op. cit.*, págs. 208 ss.

[52] Es discutible el valor de la prueba de esta proposición dado que Euclides sólo considera ciertos triángulos y ciertos cuadriláteros que forman parte del triángulo inicial. SIMSON (*op. cit.*, pág. 193) enuncia el teorema como sigue: «Si dos rectas se cortan una a otra, estarán en un plano; y tres rectas cualesquiera, que se encuentran mutuamente, están en un plano».

[53] SIMSON suprime el pasaje «entonces ΔEB, ΔZB no son rectas. De manera semejante demostraríamos que no habrá ninguna otra (recta) trazada de Δ a B excepto ΔB, la sección común de los planos AB, BΓ», por considerarlo superfluo. Cf. *op. cit.*, pág. 346.

[54] Aunque Euclides enuncia esta proposición para cualquier ángulo sólido, sólo la prueba para el caso particular del ángulo triedro. Una interpretación piadosa sería entender que la prueba de los otros casos se deja al aplicado lector. Heath suele dar abundantes muestras de piedad en este sentido. Una es la presente proposición (*op. cit.*, pág 310). De todos modos es la actitud hermenéutica más congruente con la dimensión escolar y los propósitos didácticos que suelen atribuirse a los *Elementos.*

[55] El texto griego da una prueba alternativa que Heiberg relega al apéndice. Simson selecciona esta prueba alternativa en su edición (*Edic. cit.*, pág. 209). Desde el punto de vista lógico esta opción de Simson sería la preferible (Cf. MUELLER, *op. cit.*, pág. 215), aunque parezca más alejada del presunto proceder de Euclides.

[56] Euclides, como de costumbre, presenta la prueba para un sólo caso, aquel en que Ξ, el centro del círculo que circunscribe al triángulo ΠΛΝ, cae dentro del triángulo. La prueba de los otros dos casos aparece en el texto griego detrás de la cláusula *hóper édei poiêsai.* Esta posición hace suponer que las pruebas no son de Euclides sino que se trata de una interpolación (Cf. HEATH, *op. cit.*, III, pág. 319). Al final del lema aparece la insólita cláusula *hóper proékeito poiêsai*, en vez de la habitual *hóper édei poiêsai.*

[57] Como señala Heiberg, el enunciado de esta proposición es defectuoso, pues no dice expresamente que el cuerpo que se considera está limitado sólo por seis planos. Un enunciado más correcto sería: «Si un sólido está comprendido por seis planos paralelos dos a dos, las caras opuestas son paralelogramos respectivamente iguales y semejantes.»

Simson añade «semejantes» porque esta condición es necesaria para que, en la proposición siguiente, la igualdad de los paralelepípedos se pruebe a partir de la def. 10 del libro XI.

[58] El adjetivo *parallēlepípedos* aparece por primera vez aquí sin ninguna explicación o definición como sucedía con el término *parallēlógramon.* Aunque significa «de planos paralelos», se aplica específicamente a los sólidos que son comprendidos por seis planos paralelos dos a dos.

Las caras opuestas en cada grupo de sólidos en esta proposición no sólo son iguales sino también semejantes. Euclides infiere la igualdad de los sólidos a partir de XI Def. 10. Según explicamos en la nota 47, esta definición es válida sólo en el caso de que los ángulos sólidos no estén comprendidos por más de tres ángulos planos.

[59] Simson observa que se debería haber probado que las diagonales de dos caras opuestas están en un plano antes de decir que se trace el plano que pasa a través de ellas. Pero hay una dificultad más importante que parece haberle pasado desapercibida. Euclides presenta dos prismas comprendidos por caras iguales (de hecho son iguales y semejantes) e infiere directamente que los prismas son iguales. Pero no son iguales en el sentido en que se ha empleado el término hasta ahora, es decir en el de que pueden ser aplicados uno a otro. No pueden ser aplicados así porque las caras, aunque son iguales respectivamente, no están situadas de manera semejante; en consecuencia los prismas son simétricos y debe ser probado que, aunque no son iguales y semejantes, son equivalentes, como ha sugerido Legendre (Cf. HEATH, *op. cit.*, III, págs. 331-33).

[60] *Hai ephestôsai* o *hai ephestēkyîai* quiere decir literalmente «las (rectas) levantadas». MUGLER traduce (*op. cit.*, pág. 210) por «aristas laterales», pero en este contexto, habría que aclarar que se trata de los extremos o vértices de tales aristas.

[61] Heiberg duda de la autenticidad del porisma. Por otra parte, Simson añade un teorema muy útil que esperaríamos encontrar en este lugar por analogía con VI 23 –en relación con VI 19-20–: «Los paralelepípedos contenidos por paralelogramos respectivamente equiángulos, esto es cuyos ángulos sólidos son entre sí iguales, están uno a otro en la razón compuesta de las razones de sus lados» (Cf. SIMSON, *op. cit.,* pág, 232, prop. D).

[62] Euclides asume sin prueba: a) que si dos paralelepípedos son iguales y tienen bases iguales, sus alturas son iguales, y b) que, si las bases de dos paralelepípedos iguales son desiguales, el que tiene la base mayor, tiene la altura menor (Cf. HEATH, *op. cit.,* pág. 349).

[63] Este largo enunciado se podría sintetizar de la siguiente manera: «En dos ángulos triedros iguales cada par de aristas homólogas forman ángulos iguales con el plano de las otras dos.»

[64] En esta proposición se asume que, si dos razones son iguales, la razón triplicada de una es igual a la razón triplicada de la otra, y a la inversa: si las razones triplicadas de otras dos razones son iguales, esas otras razones son iguales.

Por otra parte, Simson adopta la prueba alternativa que se encuentra en el manuscrito b. Esta demostración es aceptada también por Clavio que además aduce la prueba que Heiberg considera genuina atribuyéndola a Teón.

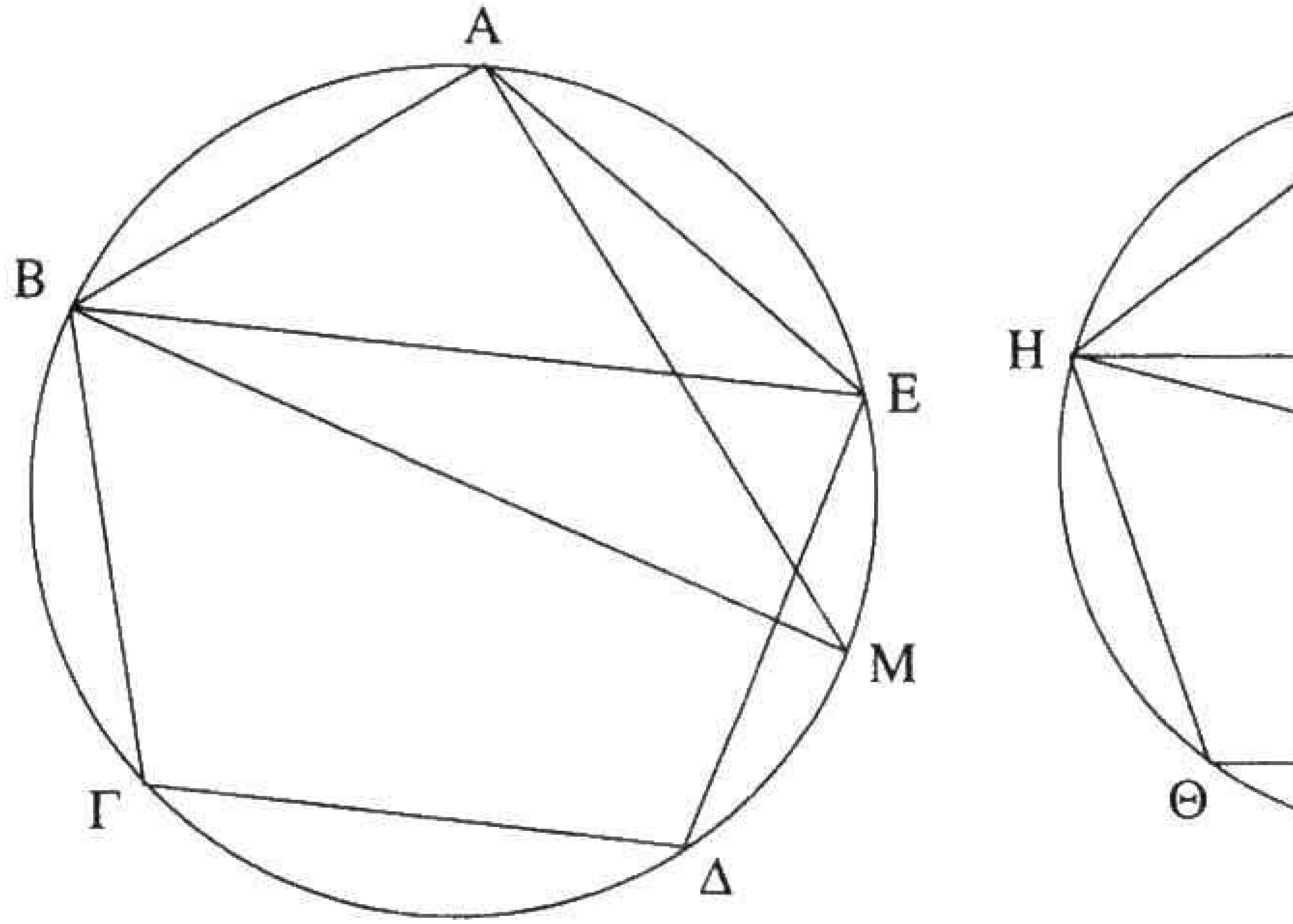
LIBRO DUODÉCIMO

Proposición 1

Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros.

Sean ΑΒΓ, ΖΗΘ los círculos y sean ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ los polígonos semejantes inscritos en ellos, y sean ΒΜ, ΗΝ los diámetros de los círculos.

Digo que, como el cuadrado de ΒΜ es al cuadrado de ΗΝ, así el polígono ΑΒΓΔΕ al polígono ΖΗΘΚΛ.



Trácense, pues, BE, AM, HΛ, ZN. Y como el polígono ABΓΔE es semejante al polígono ZHΘKΛ, el ángulo BAE es igual al (ángulo) HZΛ, y como BA es a AE, así HZ a ZΛ [VI Def. 1]. Entonces BAE, HZΛ son dos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) —el ángulo BAE al ángulo HZΛ— y los lados que comprenden los ángulos iguales, proporcionales; luego los triángulos ABE, HZΛ son equiangulares [VI 6]. Por tanto, el ángulo AEB es igual al (ángulo) ZΛH. Pero el (ángulo) AEB es igual al (ángulo) AMB: porque están sobre la misma circunferencia [III 27][65]; y el (ángulo) ZΛH es igual al (ángulo) ZNH; entonces el (ángulo) AMB es también igual al (ángulo) ZNH. Pero el (ángulo) recto BAM es igual al (ángulo) recto HZN [III 31]; luego el (ángulo) restante es igual al (ángulo) restante [I 32]. Por tanto, los triángulos ABM, ZHN son equiangulares. Luego, proporcionalmente, como BM es a HN, así BA a HZ [VI 4]. Pero el cuadrado de BM guarda con el cuadrado de HN una razón duplicada de la que BM guarda con HN, y el polígono ABΓΔE guarda con el polígono ZHΘKΛ una razón duplicada de la que BA guarda con HZ [VI 20]; entonces, como el cuadrado de BM es al cuadrado de HN, así el polígono ABΓΔE es al polígono ZHΘKΛ.

Por consiguiente, los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros. Q. E. D.

Proposición 2

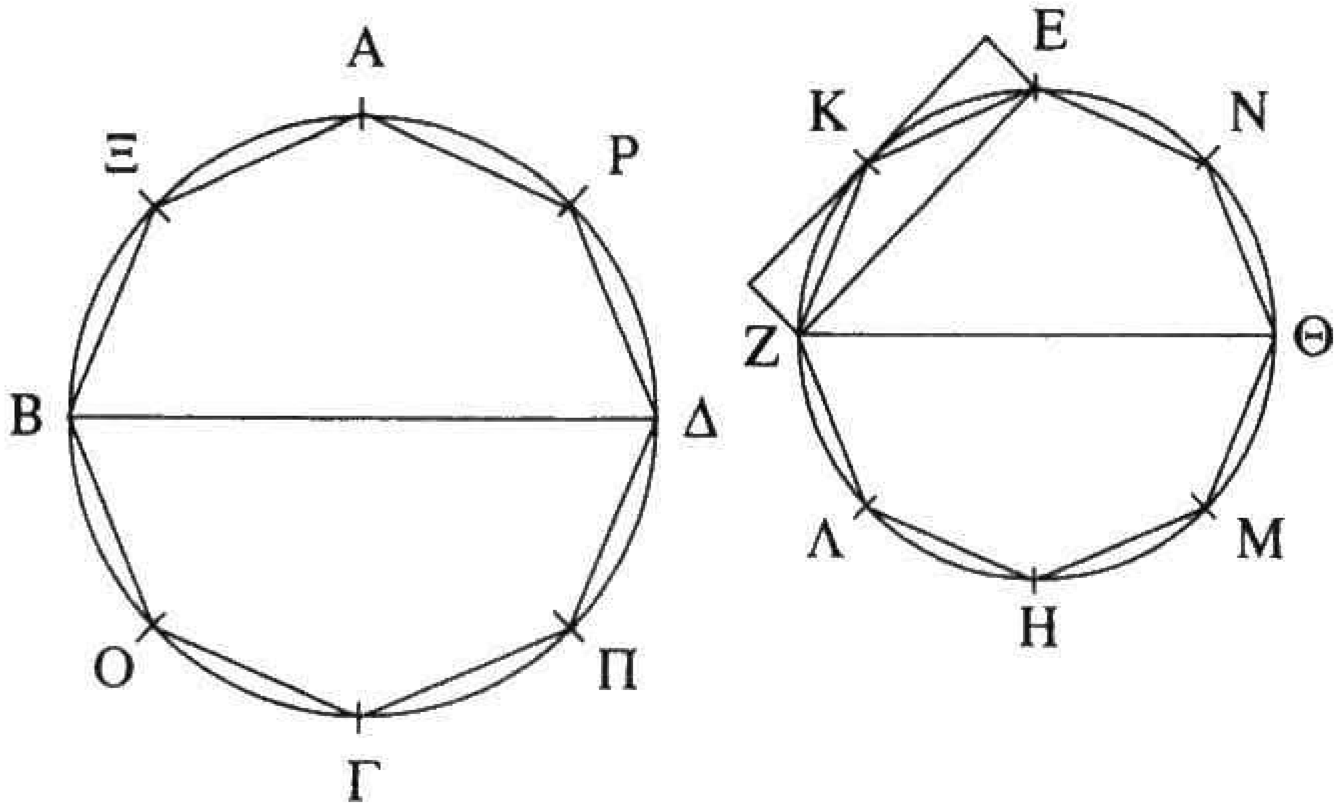
Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.

Sean ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ los círculos y ΒΔ, ΖΘ sus diámetros.

Digo que, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así el cuadrado de ΒΔ al cuadrado de ΖΘ.

Pues si el círculo ΑΒΓΔ no fuera al (círculo) ΕΖΗΘ como el cuadrado de ΒΔ es al (cuadrado) de ΖΘ, (entonces), como el (cuadrado) de ΒΔ es al (cuadrado) de ΖΘ, así será el círculo ΑΒΓΔ a un área menor que el círculo ΕΖΗΘ o a una mayor.

Séalo en primer lugar a un área menor Σ; inscríbase el cuadrado ΕΖΗΘ en el círculo ΕΖΗΘ; entonces el cuadrado inscrito es mayor que la mitad del círculo ΕΖΗΘ; porque si trazamos tangentes al círculo por los puntos Ε, Ζ, Η, Θ, el cuadrado ΕΖΗΘ es la mitad del cuadrado circunscrito en torno al círculo y el círculo es menor que el cuadrado circunscrito; de modo que el cuadrado inscrito ΕΖΗΘ es mayor que la mitad del círculo ΕΖΗΘ. divídanse en dos partes iguales las circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ por los puntos Κ, Λ, Μ, Ν, y trácense ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ; entonces cada uno de los triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que se halla: porque si trazamos tangentes al círculo por los puntos Κ, Λ, Μ, Ν, y completamos los paralelogramos sobre las (rectas) ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, cada uno de los triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ será la mitad del paralelogramo en que se halla; pero el segmento en que se halla es menor que el paralelogramo, de modo que cada uno de los triángulos ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que se halla. Entonces, si dividimos en dos las restantes circunferencias y trazamos rectas y procedemos así sucesivamente, dejaremos ciertos segmentos de círculo que serán menores que el exceso con que el círculo ΕΖΗΘ excede al área Σ: pues se ha demostrado en el primer teorema del libro X que, si se ponen dos magnitudes desiguales y se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, (se quita) una (magnitud) mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.



Quede, pues (como se ha dicho), y sean ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ los segmentos del círculo ΕΖΗΘ menores que el exceso con que el círculo ΕΖΗΘ excede al área Σ. Entonces el polígono restante ΕΚΖΛΗΜΘΝ es mayor que el área Σ. E inscríbase en el círculo ΑΒΓΛ el polígono ΑΞΒΟΓΠΔΡ semejante al polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ; entonces, como el cuadrado de ΒΔ es al cuadrado de ΖΘ, así el polígono ΑΞΒΟΓΠΔΡ es al polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ [XII 1]. Pero también, como el cuadrado de ΒΔ es al (cuadrado) de ΖΘ, así el círculo ΑΒΓΔ es al área Σ; entonces, como el círculo ΑΒΓΔ es al área Σ, así el polígono ΑΞΒΟΓΠΔΡ es al polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ [V 11]; luego, por alternancia, como el círculo ΑΒΓΔ es al polígono inscrito en él, así el área Σ al polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ [V 16]. Pero el círculo ΑΒΓΔ es mayor que el polígono inscrito en él; entonces Σ también es mayor que el polígono ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Pero también es menor; lo cual es imposible. Luego el círculo ΑΒΓΔ no es a un área menor que el círculo ΕΖΗΘ como el cuadrado de ΒΔ es al cuadrado de ΖΘ. De manera semejante demostraríamos que el círculo ΕΖΗΘ tampoco es a un área menor que el círculo ΑΒΓΔ como el cuadrado de ΖΘ es al cuadrado de ΒΔ.

Digo ahora que el cuadrado de ΒΔ tampoco es al cuadrado de ΖΘ como el círculo ΑΒΓΔ a un área mayor que el círculo ΕΖΗΘ.

Pues, si fuera posible, séalo a un (área) mayor Σ. Entonces, por inversión, como el cuadrado de ΖΘ es al cuadrado ΔΒ, así el área Σ al círculo ΑΒΓΔ. Ahora bien, como el área Σ es al círculo ΑΒΓΔ, así el círculo ΕΖΗΘ a un área menor que el círculo ΑΒΓΔ; entonces, como el cuadrado de ΖΘ es al cuadrado de ΒΔ, así el círculo ΕΖΗΘ a un área menor que el círculo ΑΒΓΔ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es imposible. Por tanto, el círculo ΑΒΓΔ no es a un área mayor que el círculo ΕΖΗΘ como el cuadrado de

BΔ es al cuadrado de ZΘ. Pero se ha demostrado que tampoco a un área menor; por tanto, como el cuadrado de BΔ es al cuadrado de ZΘ, así el círculo ABΓΔ al círculo EZHΘ.

Por consiguiente, los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros. Q. E. D.[66].

LEMA

Digo ahora que, si el área Σ es mayor que el círculo EZHΘ, como el área Σ es al círculo ABΓΔ, así el círculo EZHΘ a un área menor que el círculo ABΓΔ.

Pues, como el área Σ es al círculo ABΓΔ, sea así el círculo EZHΘ al área T.

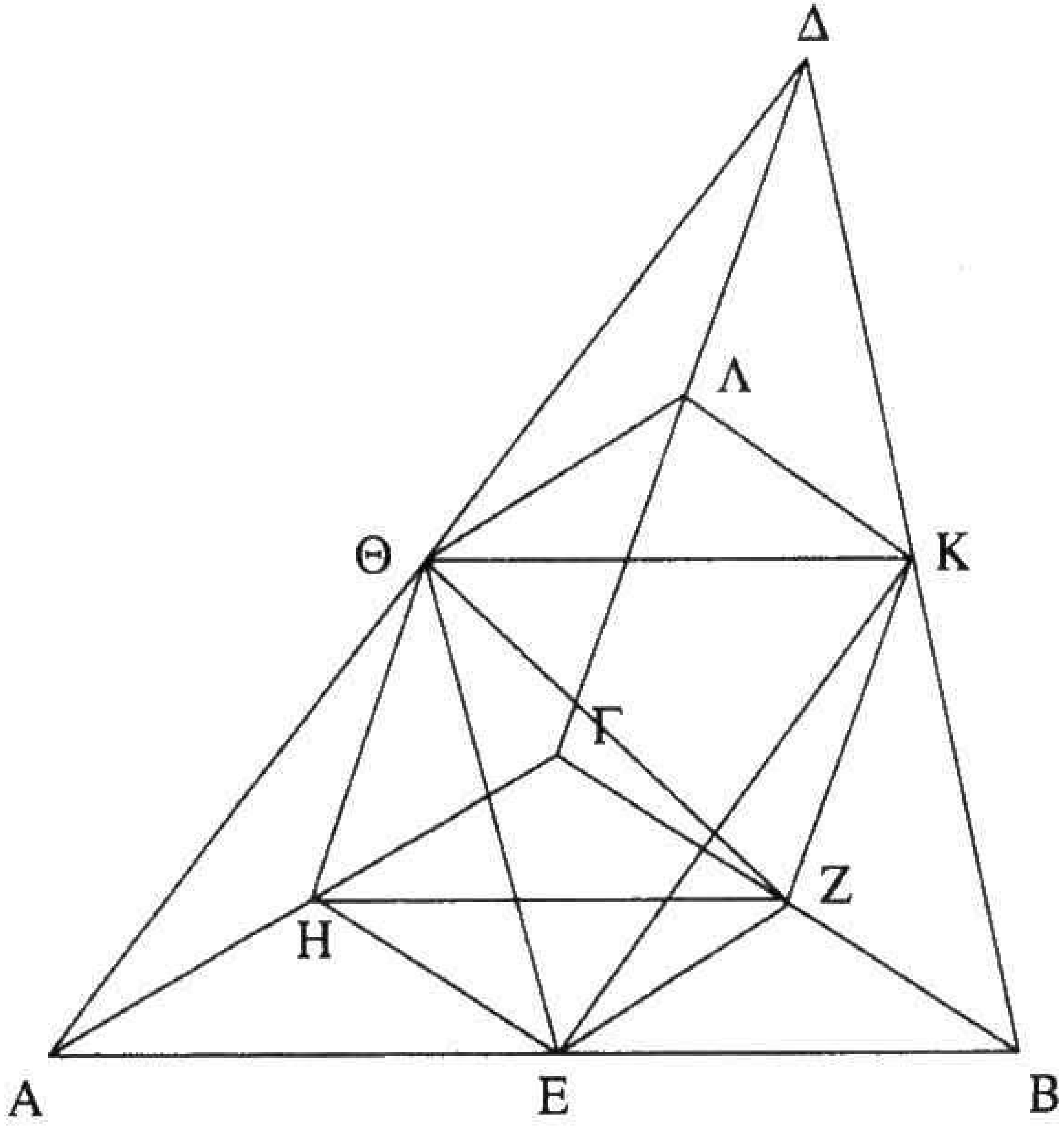
Digo que el área T es menor que el círculo ABΓΔ. Porque, efectivamente, como el área Σ es al círculo ABΓΔ, así el círculo EZHΘ al área T, luego, por alternancia, como el área Σ es al círculo EZHΘ, así el círculo ABΓΔ al área T [V 16]. Y el área Σ es mayor que el círculo EZHΘ; por tanto, el círculo ABΓΔ también es mayor que el área T. De modo que, como el área Σ es al círculo ABΓΔ, así el círculo EZHΘ a un área menor que el círculo ABΓΔ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3

Toda pirámide que tiene como base un triángulo se divide en dos pirámides iguales, semejantes una a otra y a la (pirámide) entera, que tienen triángulos como bases, y se divide en dos prismas iguales; y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.

Sea una pirámide cuya base es el triángulo ABΓ y su vértice el punto Δ.

Digo que la pirámide ABΓΔ se divide en dos pirámides iguales una a otra que tienen triángulos como bases y semejantes a la pirámide entera, y en dos prismas iguales; y que los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.



Divídanse, pues, en dos partes iguales AB, BΓ, ΓA, AΔ, ΔB, ΔΓ por los puntos E, Z, H, Θ, K, Λ; y trácense ΘE, EH, HΘ, ΘK, KΛ, ΛΘ, KZ, ZH. Puesto que AE es igual a EB y AΘ es igual a ΔΘ, entonces EΘ es paralela a ΔB [VI 2]. Por lo mismo, ΘK es también paralela a AB. Entonces ΘEBK es un paralelogramo; luego ΘK es igual a EB [I 34], Pero EB es igual a EA; por tanto, AE es también igual a ΘK, Pero AΘ es igual a ΘΔ; entonces las dos (rectas) EA, AΘ son iguales respectivamente a las dos (rectas) KΘ, ΘΔ; y el ángulo EAΘ es igual al ángulo KΘΔ; así pues, la base EΘ es igual a la base KΔ [I 4]. Luego el triángulo AEΘ es igual y semejante al triángulo ΘKΔ. Por lo mismo, el triángulo AΘH es también igual y semejante al triángulo ΘΛΔ. Y como las dos rectas que se tocan EΘ, ΘH, son paralelas a las dos rectas que se tocan KΛ, ΔΛ y no están en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Entonces, el ángulo EΘH es igual al ángulo KΔΛ. Y como las dos rectas EΘ, ΘH son iguales respectivamente a las dos (rectas) KΛ, ΔΛ, y el ángulo EΘH es igual al ángulo KΔΛ, entonces la base EH es igual a la base KΛ

[I 4]; luego el triángulo EΘH es igual y semejante al triángulo KΔΛ. Por lo mismo, el triángulo AEH es también igual y semejante al triángulo ΘKΛ. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ es también igual y semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ΘKΛ y su vértice el punto Δ [XI Def. 10]. Y puesto que ΘK ha sido trazada paralela a uno de los lados del triángulo AΔB, el (lado) AB, los triángulos AΔB, ΔΘK son equiangulares [I 29] y tienen los lados proporcionales; luego el triángulo AΔB es semejante al triángulo ΔΘK [VI Def. 1]. Por lo mismo, el triángulo ΔBΓ es semejante al triángulo ΔKΛ y el (triángulo) AΔΓ al (triángulo) ΔΛΘ. Ahora bien, como las dos rectas que se tocan, BA, AΓ, son paralelas a las dos rectas que se tocan, KΘ, ΘΛ, y no están en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Entonces el ángulo BAΓ es igual al ángulo KΘΛ. Y como BA es a AΓ, así KΘ a ΘΛ; luego el triángulo ABΓ es semejante al triángulo ΘKΛ. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo ABΓ y su vértice el punto Δ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ΘKΛ y su vértice el punto Δ. Pero se ha demostrado que la pirámide cuya base es el triángulo ΘKΛ y su vértice el punto Δ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ. Por tanto, cada una de las pirámides AEHΘ, ΘKΛΔ es semejante a la pirámide entera ABΓΔ.

Ahora bien, como BZ es igual a ZΓ, el paralelogramo EBZH es el doble del triángulo HZΓ. Y puesto que, si hay dos prismas de la misma altura, y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo, y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas son iguales [XI 39], entonces el prisma comprendido por los dos triángulos BKZ, EΘH y los tres paralelogramos EBZH, EBKΘ, ΘKZH es igual al prisma comprendido por los dos triángulos HZΓ, ΘKΛ y los tres paralelogramos KZΓΛ, ΛΓHΘ, ΘKZH.

Y queda claro que cada uno de los prismas —a saber: aquel cuya base es el paralelogramo EBZH y ΘK su recta opuesta y aquel cuya base es el triángulo HZΓ y ΘKΛ su triángulo opuesto— es mayor que cada una de las pirámides cuyas bases son los triángulos AEH, ΘKΛ y sus vértices los puntos Θ, Δ; porque, si trazamos las rectas EZ, EK, el prisma cuya base es el paralelogramo EBZH y ΘK su recta opuesta es mayor que la pirámide cuya base es el triángulo EBZ y su vértice el punto K. Pero la pirámide cuya base es el triángulo EBZ y su vértice el punto K es igual a la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ: porque están comprendidas por planos iguales y semejantes. De modo que el prisma cuya base es el paralelogramo EBZH y ΘK su recta opuesta es mayor que la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ. Pero el prisma cuya base es el paralelogramo EBZH y ΘK su recta opuesta es igual al prisma cuya base es el triángulo HZΓ y ΘKΛ su triángulo opuesto; y la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ΘKΛ y su vértice el punto Δ. Por tanto, los dos prismas antedichos son mayores que las dos pirámides antedichas cuyas bases son los triángulos AEH, ΘKΛ y sus vértices los puntos Θ, Δ.

Por consiguiente, la pirámide entera cuya base es el triángulo ABΓ y su vértice el punto Δ se ha dividido en dos pirámides iguales entre sí y en dos prismas iguales. Y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera. Q. E. D.

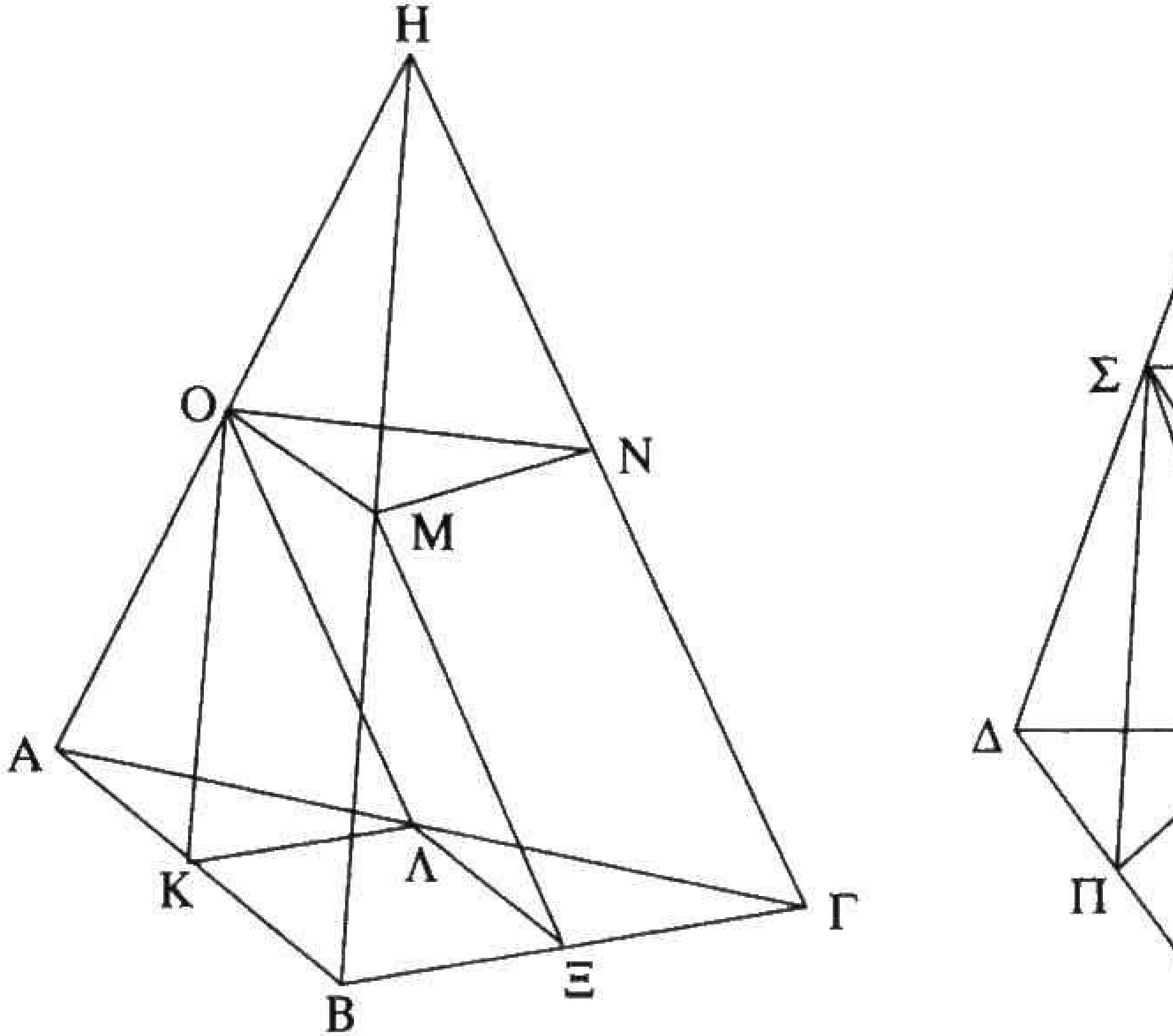
Proposición 4

Si hay dos pirámides de la misma altura que tienen triángulos como bases, y cada una de ellas se divide en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; (entonces) como la base de una pirámide es a la base de la otra pirámide, así serán todos los prismas de una pirámide a todos los prismas iguales en número de la otra pirámide.

Sean dos pirámides de la misma altura que tienen como bases los triángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ, y como vértices los puntos Η, Θ; y divídase cada una de ellas en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la (pirámide) entera, y en dos prismas iguales [XII 3].

Digo que, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así (son) todos los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a los prismas iguales en número de la pirámide ΔΕΖΘ.

Pues como ΒΞ es igual a ΞΓ y ΑΛ a ΛΓ, entonces ΛΞ es paralela a ΑΒ y el triángulo ΑΒΓ es semejante al triángulo ΛΞΓ; por lo mismo, el triángulo ΔΕΖ es también semejante al triángulo ΡΦΖ. Y como ΒΓ es el doble de ΓΞ, mientras que ΕΖ es (el doble) de ΖΦ, entonces, como ΒΓ es a ΓΞ, así ΕΖ a ΖΦ. Ahora bien, se han construido sobre ΒΓ, ΓΞ las figuras rectilíneas semejantes y situadas de manera semejante ΑΒΓ, ΛΞΓ, y sobre ΕΖ, ΖΦ las (figuras rectilíneas) semejantes y situadas de manera semejante ΔΕΖ, ΡΦΖ; luego, como el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΛΞΓ, así el triángulo ΔΕΖ al triángulo ΡΦΖ [VI 22]. Entonces, por alternancia, como el triángulo ΑΒΓ es al (triángulo) ΔΕΖ, así el (triángulo) ΛΞΓ es al triángulo ΡΦΖ [V 16]. Ahora bien, como el triángulo ΛΞΓ es al triángulo ΡΦΖ, así el prisma cuya base es el triángulo ΛΞΓ y su (triángulo) opuesto ΟΜΝ es al prisma cuya base es el triángulo ΡΞΖ y su (triángulo) opuesto ΣΤΥ [Lema subsiguiente a esta proposición]; entonces, como el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΔΕΖ, así el prisma cuya base es el triángulo ΛΞΓ y su (triángulo) opuesto ΟΜΝ al prisma cuya base es el triángulo ΡΦΖ y su (triángulo) opuesto ΣΤΥ. Pero, como los antedichos prismas son entre sí, así el prisma cuya base es el paralelogramo ΚΒΞΛ y su recta opuesta ΟΜ, al prisma cuya base es el paralelogramo ΠΕΦΡ y su recta opuesta ΣΤ [XI 39; XII 3]. Entonces los dos prismas, aquel cuya base es el paralelogramo ΚΒΞΛ y su recta opuesta ΟΜ y aquel cuya base es el (triángulo) ΛΞΓ y su triángulo opuesto ΟΜΝ guardan la misma razón que los dos prismas, aquel cuya base es el (paralelogramo) ΠΕΦΡ y su recta opuesta ΣΤ y aquel cuya base es el (triángulo) ΡΦΖ y cuyo triángulo opuesto es ΣΤΥ [V 12]. Luego, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así los dos prismas a los (otros) dos prismas dichos.



Y de manera semejante, si las pirámides ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ se dividen en dos prismas y dos pirámides, como la base ΟΜΝ es a la base ΣΤΥ, así serán los dos prismas de la pirámide ΟΜΝΗ a los dos prismas de la pirámide ΣΤΥΘ. Ahora bien, como la base ΟΜΝ es a la base ΣΤΥ, así la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ: porque cada uno de los triángulos ΟΜΝ, ΣΤΥ son iguales respectivamente a los triángulos ΛΞΓ, ΡΦΖ. Por tanto, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así (son) los cuatro prismas a los cuatro prismas. De manera semejante, si dividimos las pirámides restantes en dos pirámides y dos prismas, entonces, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así serán todos los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a todos los prismas iguales en número de la pirámide ΔΕΖΘ. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar como sigue que, como el triángulo ΛΞΓ es al triángulo ΡΦΖ, así el prisma cuya base es el triángulo ΛΞΓ y su triángulo opuesto ΟΜΝ al prisma cuya base es el (triángulo) ΡΦΖ y su triángulo opuesto ΣΤΥ.

Pues considérense en la misma figura las perpendiculares a los planos ΑΒΓ, ΔΕΖ desde los (puntos) Η, Θ que son iguales evidentemente porque se ha supuesto que las pirámides son de la misma altura. Y como las dos rectas ΗΓ y la perpendicular desde Η son cortadas por los planos paralelos ΑΒΓ, ΟΜΝ, serán cortadas en las mismas razones [XI 17]. Ahora bien, ΗΓ se ha dividido también en dos partes iguales por el plano ΟΜΝ en el (punto) N; entonces la perpendicular desde Η al plano ΑΒΓ será dividida también en dos partes iguales por el plano ΟΜΝ. Por lo mismo, la perpendicular desde Θ al plano ΔΕΖ se ha dividido en dos partes iguales por el plano ΣΤΥ. Y las perpendiculares a los planos ΑΒΓ, ΔΕΖ desde los puntos Η, Θ son iguales; luego las perpendiculares a los (planos) ΑΒΓ, ΔΕΖ desde los triángulos ΟΜΝ, ΣΤΥ son también iguales. Por tanto, los prismas cuyas bases son los triángulos ΛΞΓ, ΡΦΖ y sus triángulos opuestos ΟΜΝ, ΣΤΥ son de la misma altura. De modo que los sólidos paralelepípedos descritos sobre dichos prismas son de la misma altura y son entre sí como sus bases [XI 32]; por tanto, sus mitades, dichos prismas, son entre sí como la base ΛΞΓ es a la base ΡΦΖ. Q. E. D.

Proposición 5

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen triángulos como bases son entre sí como sus bases.

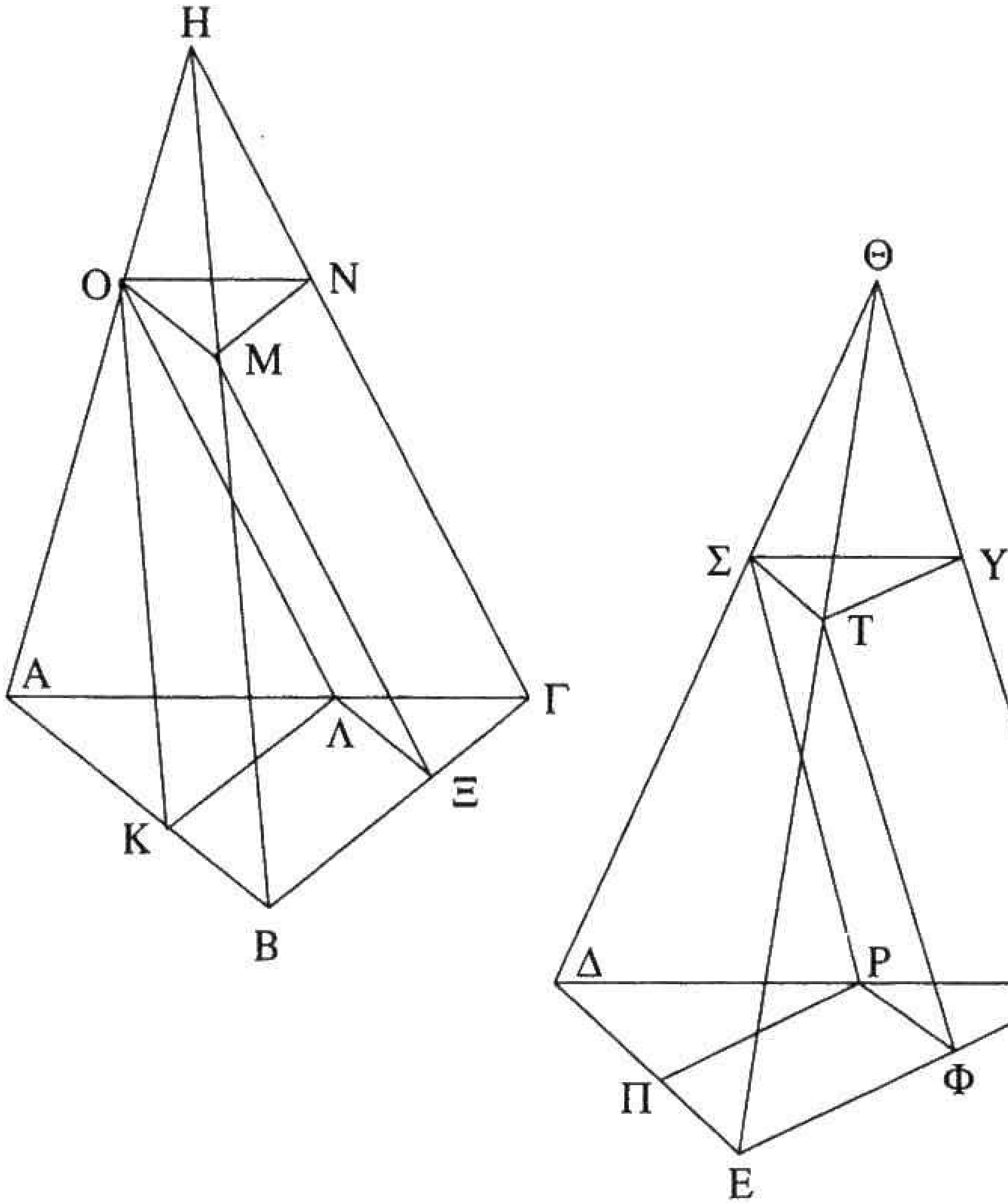
Sean de la misma altura las pirámides cuyas bases son los triángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ y sus vértices los puntos Η, Θ.

Digo que, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la pirámide ΑΒΓΗ a la pirámide ΔΕΖΓ.

Pues, si la base ΑΒΓ no es a la base ΔΕΖ como la pirámide ΑΒΓΗ es a la pirámide ΔΕΖΘ, (entonces), como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así será la pirámide ΑΒΓΗ o bien a un (sólido) menor que la pirámide ΔΕΖΗ o bien a uno mayor.

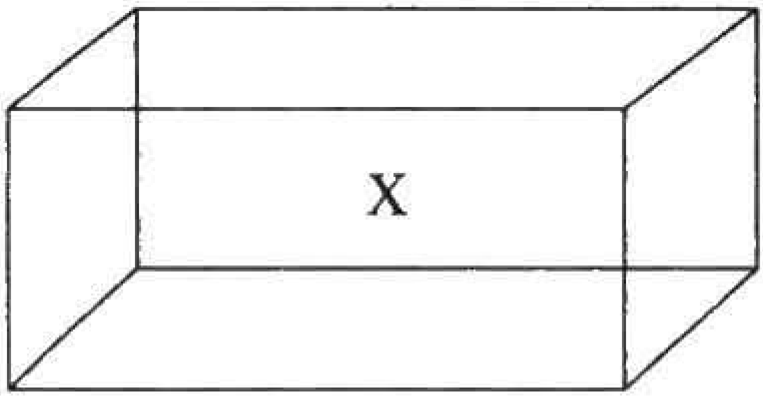
Séalo, en primer lugar, a uno menor, Χ, y divídase la pirámide ΔΕΖΘ en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; entonces los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera [XII 3]. Y divídanse, a su vez, de manera semejante las pirámides resultantes de la división y así sucesivamente hasta que, a partir de la pirámide ΔΕΖΘ, queden ciertas pirámides que sean menores que el exceso con que la pirámide ΔΕΖΘ excede al sólido X [X 1]. Queden (tales pirámides) y sean las pirámides ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ por mor de la argumentación; entonces los prismas restantes de la pirámide ΔΕΖΘ son mayores que el sólido Χ. Divídase también la pirámide ΑΒΓΗ de manera semejante y el mismo número de veces que la pirámide ΔΕΖΘ. Entonces, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a los prismas de la pirámide ΔΕΖΘ [XII 4]. Pero también, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la pirámide ΑΒΓΗ al sólido Χ; luego como la pirámide ΑΒΓΗ es al sólido Χ, así los prismas de la pirámide ΑΒΓΗ a los prismas de la pirámide

ΔEZΘ [V 11]; así pues, por alternancia, como la pirámide ABΓH es a sus prismas, así el sólido X es a los prismas de la pirámide ΔEZΘ [V 16]. Pero la pirámide ABΓH es mayor que sus prismas; entonces el sólido X es mayor que los prismas de la pirámide ΔEZΘ. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, la pirámide ABΓH no es a un (sólido) menor que la pirámide ΔEZΘ como la base ABΓ es a la base ΔEZ. De manera semejante se demostraría que la pirámide ΔEZΘ tampoco es a un sólido menor que la pirámide ABΓH como la base ΔEZ es a la base ABΓ.



Digo además que la pirámide ΑΒΓΗ tampoco es a un sólido mayor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ.

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor Χ; entonces, por inversión, como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ, así el sólido Χ a la pirámide ΑΒΓΗ. Pero como el sólido Χ es a la pirámide ΑΒΓΗ, así la pirámide ΔΕΖΘ a un (sólido) menor que la pirámide ΑΒΓΗ, como se ha demostrado anteriormente [XII 2 lema]. Entonces, como la base ΔΕΖ es a la base ΑΒΓ, así la pirámide ΔΕΖΘ a un (sólido) menor que la pirámide ΑΒΓΗ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es absurdo; por tanto, la pirámide ΑΒΓΗ no es a un sólido mayor que la pirámide ΔΕΖΘ como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ. Pero se ha demostrado que tampoco es a uno menor. Por consiguiente, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la pirámide ΑΒΓΗ a la pirámide ΔΕΖΘ. Q. E. D.



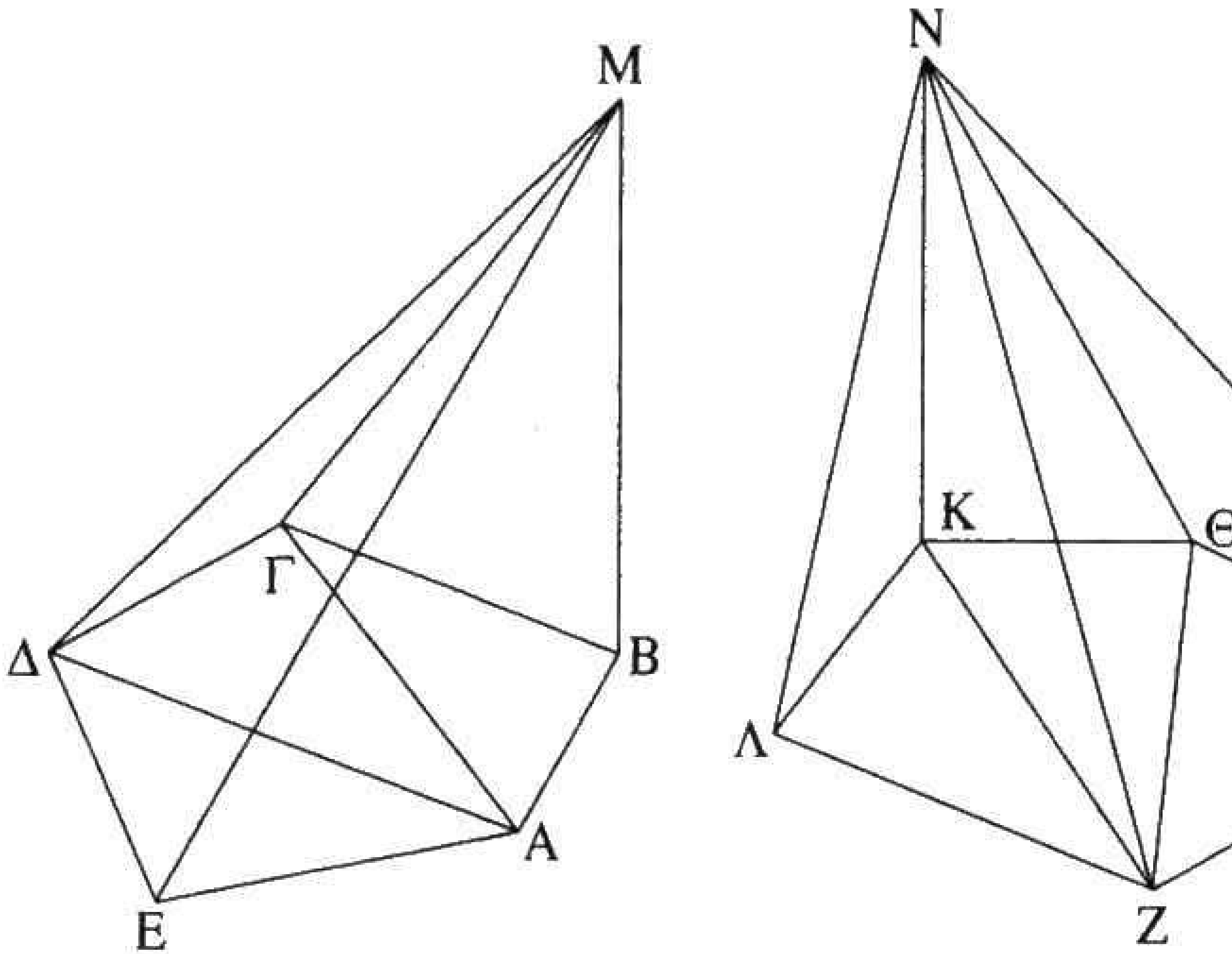
Proposición 6

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como bases son entre sí como sus bases.

Sean de la misma altura las pirámide cuyas bases son los polígonos ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ y sus vértices los puntos Μ, Ν.

Digo que como la base ΑΒΓΔΕ es a la base ΖΗΘΚΛ, así la pirámide ΑΒΓΔΕΜ a la pirámide ΖΗΘΚΛΝ.

Trácense, pues, las (rectas) ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Como en efecto ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ son dos pirámides que tienen triángulos como bases e igual altura, son entre sí como sus bases [XII 5]; entonces, como la base ΑΒΓ es a la base ΑΓΔ, así la pirámide ΑΒΓΜ es a la pirámide ΑΓΔΜ. Y, por composición, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΑΓΔ, así la pirámide ΑΒΓΔΜ es a la pirámide ΑΓΔΜ [V 18]. Pero también, como la base ΑΓΔ es a la base ΑΔΕ, así la pirámide ΑΓΔΜ a la pirámide ΑΔΕΜ [XII 5]. Luego, por igualdad, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΑΔΕ, así la pirámide ΑΒΓΔΜ a la pirámide ΑΔΕΜ [V 22]. Y de nuevo, por composición, como la base ΑΒΓΔΕ es a la base ΑΔΕ, así la pirámide ΑΒΓΔΕΜ a la pirámide ΑΔΕΜ [V 18]. De manera semejante se demostraría que también, como la base ΖΗΘΚΛ es a la base ΖΗΘ, así la pirámide ΖΗΘΚΛΝ a la pirámide ΖΗΘΝ. Y como ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ son dos pirámides que tienen triángulos como bases e igual altura, entonces, como la base ΑΔΕ es a la base ΖΗΘ, así la pirámide ΑΔΕΜ a la pirámide ΖΗΘΝ [XII 5]. Ahora bien, como la base ΑΔΕ es a la base ΑΒΓΔΕ, así era la pirámide ΑΔΕΜ a la pirámide ΑΒΓΔΕΜ. Luego, por igualdad, como la base ΑΒΓΔΕ es a la base ΖΗΘ, así la pirámide ΑΒΓΔΕΜ a la pirámide ΖΗΘΝ [V 22]. Pero también, como la base ΖΗΘ es a la base ZHΘKΛ, así era la pirámide ZHΘN a la pirámide ZHΘKΛN. Por consiguiente, por igualdad, como la base ABΓΔE es a la base ZHΘKΛ, así la pirámide ABΓΔEM a la pirámide ZHΘKΛN [V 22]. Q. E. D.



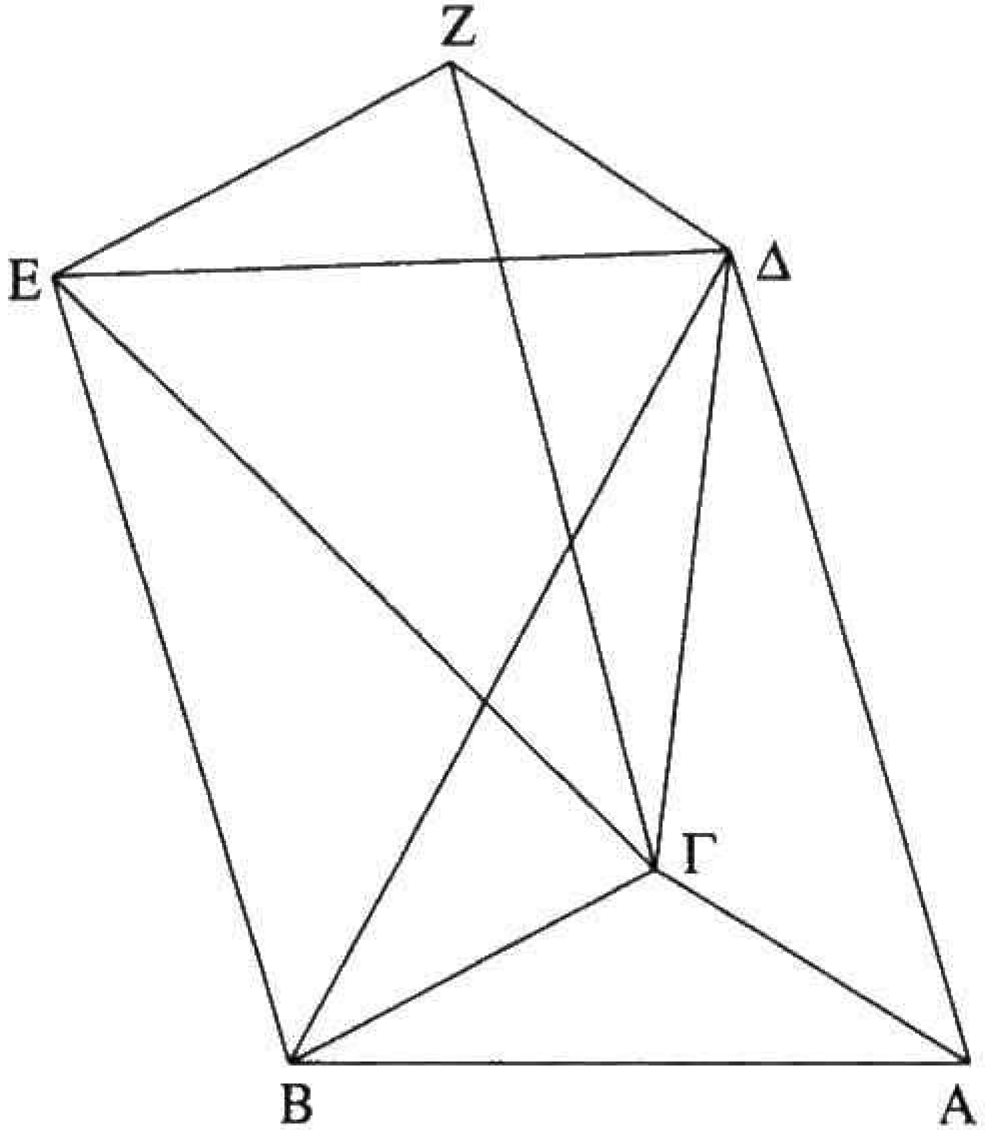
Proposición 7

Todo prisma que tiene como base un triángulo se divide en tres prismas iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Sea un prisma cuya base es el triángulo ABΓ y su (triángulo) opuesto ΔEZ.

Digo que el prisma ABΓΔEZ se divide en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Trácense, pues, las (rectas) BΔ, EΓ, ΓΔ. Como ABEΔ es un paralelogramo y su diámetro[67] es BΔ, entonces el triángulo ABΔ es igual al triángulo EBΔ [I 34]. Luego la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice Γ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ΔEB y su vértice el punto Γ [XII 5]. Pero la pirámide cuya base es el triángulo ΔEB y su vértice el punto Γ es la misma que la pirámide cuya base es el triángulo EBΓ y su vértice el punto Γ: porque están comprendidas por los mismos planos. Entonces, la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo EBΓ y su vértice el punto Δ. Puesto que, a su vez, ZΓBE es un paralelogramo y su diámetro es ΓE, el triángulo ΓEZ es igual al triángulo ΓBE [I 34]. Entonces la pirámide cuya base es el triángulo BΓE y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo EΓZ y su vértice el punto Δ [XII 5]. Pero se ha demostrado que la pirámide cuya base es el triángulo BΓE y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ; entonces la pirámide cuya base es el triángulo ΓEZ y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ; por tanto, el prisma ABΓΔEZ se ha dividido en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.



Y como la pirámide cuya base es el triángulo ABΔ y su vértice el punto Γ es la misma que la pirámide cuya base es el triángulo ΓAB y su vértice el punto Δ: porque están comprendidas por los mismos planos, mientras que la pirámide cuya base es el triángulo ΑΒΔ y su vértice el punto Γ se ha demostrado que es el tercio del prisma cuya base es el triángulo ΑΒΓ y su triángulo opuesto ΔΕΖ, entonces la pirámide cuya base es el triángulo ΑΒΓ y su vértice el punto Δ es el tercio del prisma que tiene la misma base, a saber: el triángulo ΑΒΓ, y como triángulo opuesto ΔΕΖ.

Porisma:

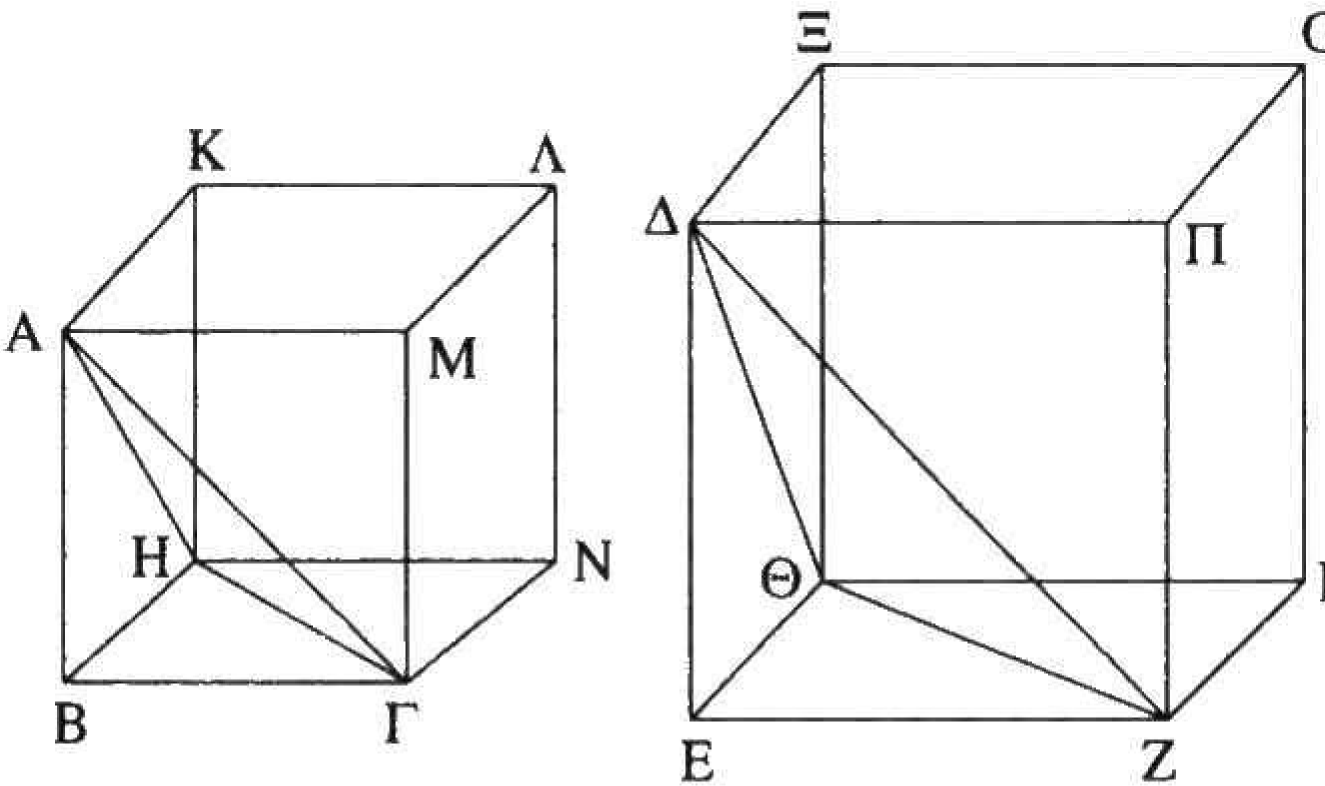
A partir de esto que da claro que toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que ella e igual altura. Q. E. D. [68].

Proposición 8

Las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Sean las pirámides semejantes y situadas de manera semejante cuyas bases son los triángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ y sus vértices los puntos Η, Θ.

Digo que la pirámide ΑΒΓΗ guarda con la pirámide ΔΕΖΘ una razón triplicada de la que ΒΓ (guarda) con ΕΖ.



Complétense, pues, los sólidos paralelepípedos ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ.

Ahora bien, como la pirámide ΑΒΓΗ es semejante a la pirámide ΔΕΖΘ, entonces, el ángulo ΑΒΓ es igual al ángulo ΔΕΖ, y el ángulo ΗΒΓ es igual al ángulo ΘΕΖ, y el ΑΒΗ al ΔΕΘ, y como ΑΒ es a ΔΕ, así ΒΓ a ΕΖ y ΒΗ a ΕΘ. Y dado que, como ΑΒ es a ΔΕ, así ΒΓ a ΕΖ y que los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales, entonces, el paralelogramo ΒΜ es semejante al paralelogramo ΕΠ. Por lo mismo, en efecto, el (paralelogramo) ΒΝ es semejante al (paralelogramo) ΕΡ y el (paralelogramo) ΒΚ al (paralelogramo) ΕΞ; luego los tres (paralelogramos) ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ son semejantes a los tres (paralelogramos) ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ. Pero los tres (paralelogramos) ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ son iguales y semejantes a sus tres opuestos, y los tres (paralelogramos) ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ son también iguales y semejantes a sus tres opuestos [XI 24], Entonces los sólidos ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ están comprendidos por planos semejantes e iguales en número. Luego el sólido ΒΗΜΛ es semejante al sólido ΕΘΠΟ. Pero los sólidos paralelepípedos semejantes guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes [XI 33]. Entonces el sólido ΒΗΜΛ guarda con el sólido ΕΘΠΟ una razón triplicada de la que el lado correspondiente ΒΓ guarda con el lado correspondiente ΕΖ. Pero como el sólido ΒΗΜΛ es al sólido ΕΘΠΟ, así la pirámide ΑΒΓΗ a la pirámide ΔΕΖΘ: pues la pirámide es la sexta parte del sólido porque el prisma, que es la mitad del sólido paralelepípedo [XI 28], es el triple de la pirámide [XII 7].

Por consiguiente, la pirámide ΑΒΓΗ guarda con la pirámide ΔΕΖΘ una razón triplicada de la que ΒΓ (guarda) con ΕΖ. Q. E. D.

Porisma:

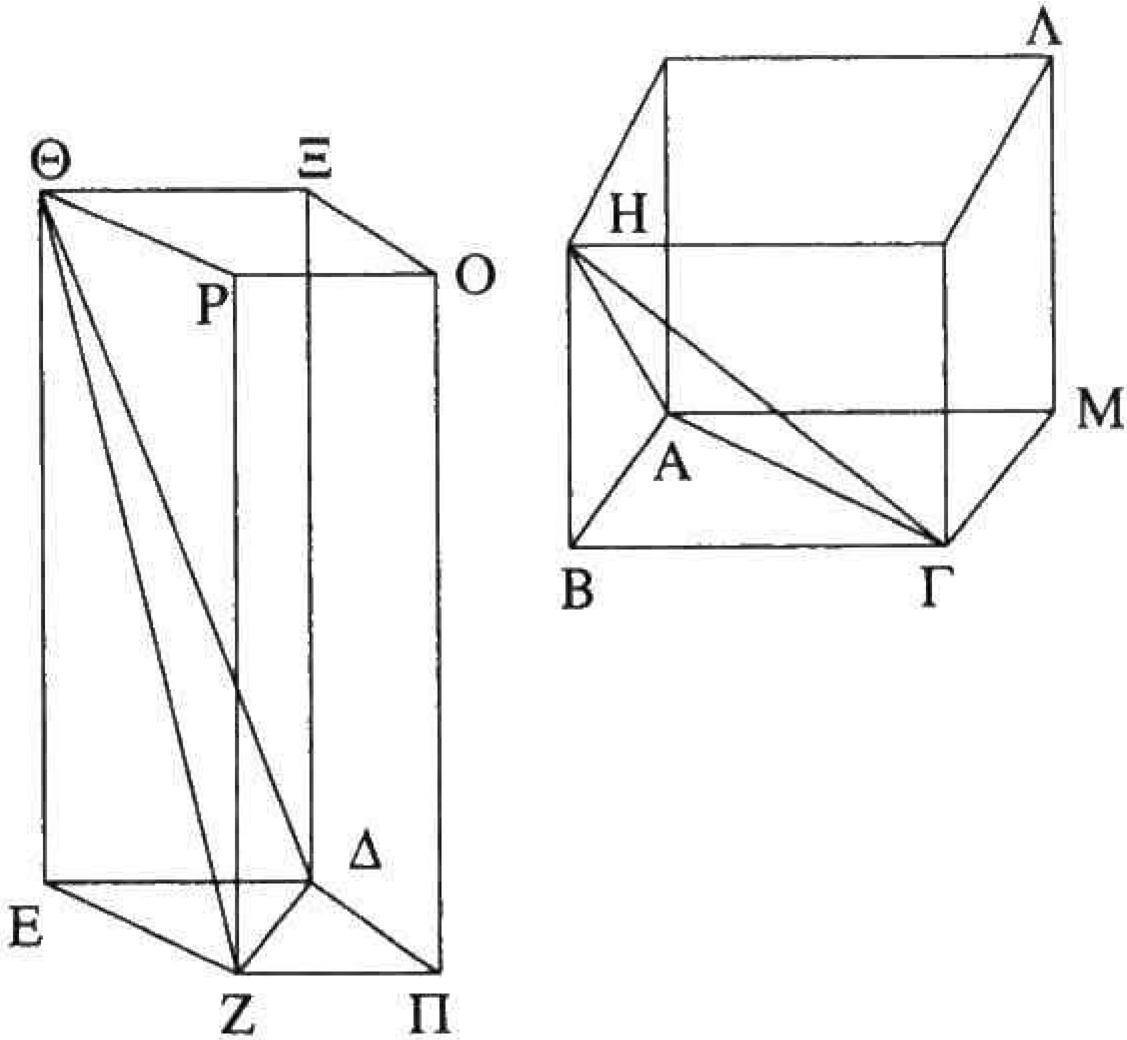
A partir de esto queda claro que las pirámides que tienen como bases polígonos guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes. Pues, si se dividen en las pirámides contenidas en ellas que tengan como bases triángulos —por el hecho de que los polígonos semejantes de sus bases se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros [VI 20]— entonces, como una de las pirámides con base triangular de la primera es a una de las pirámides con base triangular de la segunda, así serán todas las pirámides con base triangular de la primera pirámide a las pirámides con base triangular de la segunda pirámide [V 12], es decir, la propia pirámide que tiene como base un polígono a la (otra) pirámide que tiene como base un polígono. Pero la pirámide que tiene como base un triángulo guarda con la (pirámide) que tiene como base un triángulo una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Por consiguiente, la (pirámide) que tiene como base un polígono guarda con la que tiene una base semejante una razón triplicada de la que el lado guarda con el lado[69].

Proposición 9

Las bases de las pirámides iguales que tienen como bases triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas; y aquellas pirámides que tienen como bases triángulos, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales.

Sean, pues, las pirámides iguales que tienen como bases los triángulos ΑΒΓ, ΔΕΖ y como vértices los puntos Η, Θ.



Digo que las bases de las pirámides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ están inversamente relacionadas con sus alturas, y como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la altura de la pirámide ΔΕΖΘ a la altura de la pirámide ΑΒΓΗ.

Pues complétense los sólidos paralelepípedos ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Y como la pirámide ΑΒΓΗ es igual a la pirámide ΔΕΖΘ, y el sólido ΒΗΜΛ es el séxtuple de la pirámide ΑΒΓΗ, mientras que el sólido ΕΘΠΟ es el séxtuple de la pirámide ΔΕΖΘ, entonces el sólido ΒΗΜΛ es igual al sólido ΕΘΠΟ. Pero las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con sus alturas [XI 34]; entonces, como la base ΒΜ es a la base ΕΠ, así la altura del sólido ΕΘΠΟ es a la altura del sólido ΒΗΜΛ. Ahora bien, como la base ΒΜ es a la base ΕΠ, así el triángulo ΑΒΓ al triángulo ΔΕΖ [I 34]. Luego también, como el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΔΕΖ, así la altura del sólido ΕΘΠΟ a la altura del sólido ΒΗΜΛ [V 11]. Pero la altura del sólido ΕΘΠΟ es la misma que la altura de la pirámide ΔΕΖΘ, y la altura del sólido ΒΗΜΛ es la misma que la altura de la pirámide ΑΒΓΗ; entonces, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la altura de la pirámide ΔΕΖΘ es a la altura de la pirámide ΑΒΓΗ. Por tanto, las bases de las pirámides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Pero ahora, estén las bases de las pirámides ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ inversamente relacionadas con sus alturas, y, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la altura de la pirámide ΔΕΖΘ a la altura de la pirámide ΑΒΓΗ.

Digo que la pirámide ΑΒΓΗ es igual a la pirámide ΔΕΖΘ.

Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así la altura de la pirámide ΔΕΖΘ a la altura de la pirámide ΑΒΓΗ, mientras que, como la base ΑΒΓ es a la base ΔΕΖ, así el paralelogramo ΒΜ al paralelogramo ΕΠ; entonces también, como el paralelogramo ΒΜ es al paralelogramo ΕΠ, así la altura de la pirámide ΔΕΖΘ a la altura de la pirámide ΑΒΓΗ [V 11], Ahora bien, la altura de la pirámide ΔΕΖΘ es la misma que la altura del paralelepípedo ΕΘΠΟ, y la altura de la pirámide ΑΒΓΗ es la misma que la altura del paralelepípedo ΒΗΜΛ. Entonces, como la base ΒΜ es a la base ΕΠ, así la altura del paralelepípedo ΕΘΠΟ a la altura del paralelepípedo ΒΗΜΛ. Pero aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales [XI 34]; luego el sólido paralelepípedo ΒΗΜΛ es igual al sólido paralelepípedo ΕΘΠΟ. Ahora bien, la pirámide ΑΒΓΗ es la sexta parte del (paralelepípedo) ΒΗΜΛ, y la pirámide ΔΕΖΘ es la sexta parte del paralelepípedo ΕΘΠΟ. Por tanto la pirámide ΑΒΓΗ es igual a la pirámide ΔΕΖΘ.

Por consiguiente, las bases de las pirámides que tienen como bases triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas, y aquellas pirámides que tienen como bases triángulos, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales. Q. E. D.

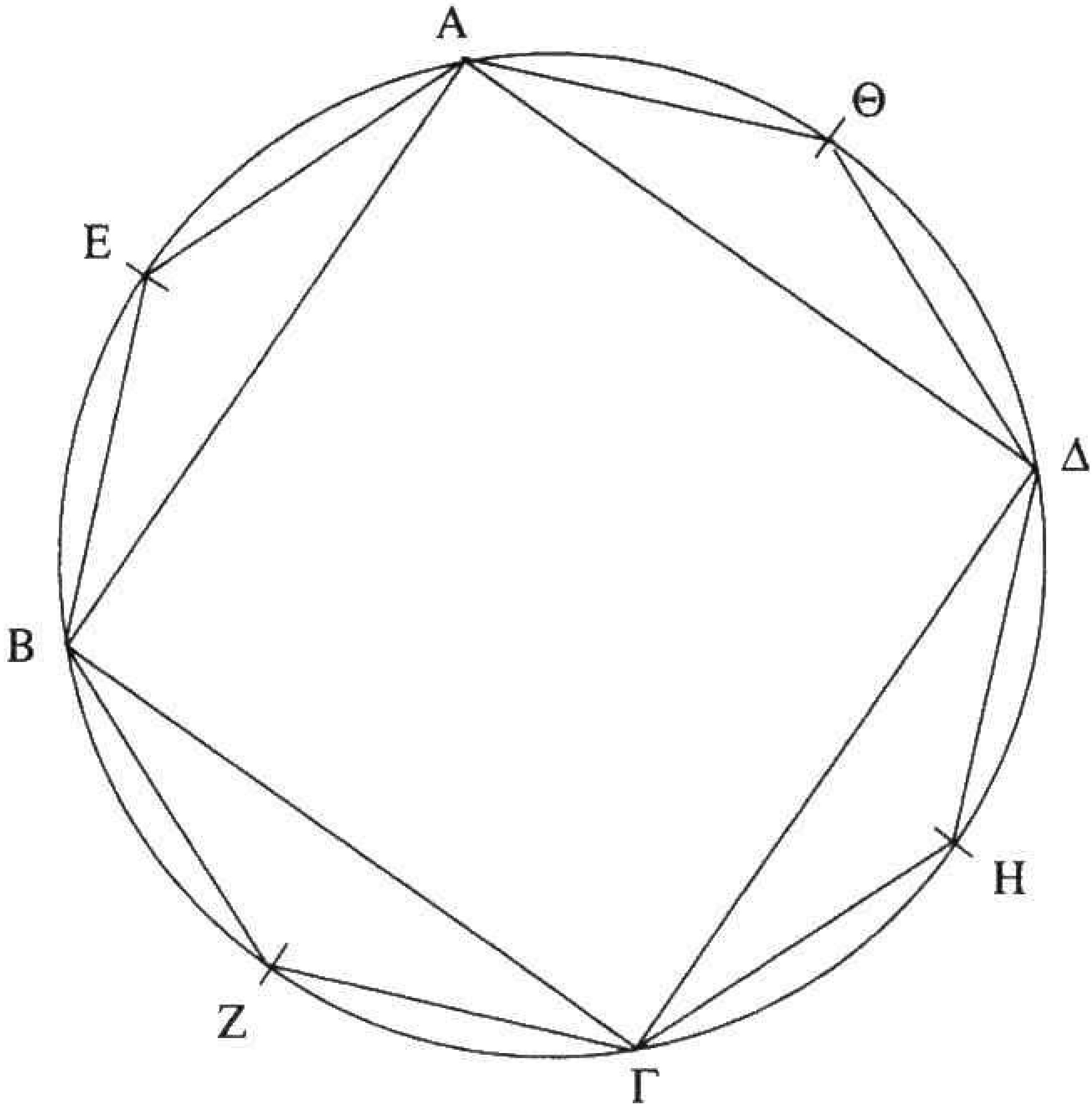
Proposición 10

Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura.

Tenga, pues, un cono la misma base que un cilindro, el círculo ΑΒΓΔ, e igual altura.

Digo que el cono es la tercera parte del cilindro, es decir que el cilindro es el triple del cono.

Pues, si el cilindro no es el triple del cono, el cilindro será o mayor que el triple del cono o menor que el triple del cono. Sea, en primer lugar, mayor que el triple e inscríbase en el círculo ΑΒΓΔ el cuadrado ΑΒΓΔ [IV 6]. Entonces, el cuadrado ΑΒΓΔ es mayor que la mitad del círculo ΑΒΓΔ. Levántese a partir del cuadrado ΑΒΓΔ un prisma de altura igual a la del cilindro. Entonces el prisma levantado es mayor que la mitad del cilindro: puesto que, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo ΑΒΓΔ [IV 7], el cuadrado inscrito en el círculo ΑΒΓΔ es la mitad del circunscrito; y los sólidos levantados a partir de ellos son prismas paralelepípedos de la misma altura, y los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XI 32]; entonces, el prisma levantado a partir del cuadrado ΑΒΓΔ es la mitad del prisma levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo ΑΒΓΔ [XI 28, XII 6 y 7 Por.], y el cilindro es menor que el prisma levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo ΑΒΓΔ; luego el prisma levantado a partir del cuadrado ΑΒΓΔ y de la misma altura que el cilindro es mayor que la mitad del cilindro. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias AB, BΓ, ΓΔ, ΔA por los puntos E, Z, H, Θ, y trácense AE, EB, BZ, ZΓ, ΓE, HΔ, ΔΘ, ΘA; entonces cada uno de los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA es mayor que la mitad del segmento del círculo ABΓΔ en el que está, como demostrábamos anteriormente [XII 2]. Levántense prismas de la misma altura que el cilindro sobre cada uno de los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA; entonces cada uno de los prismas levantados es mayor que la mitad del segmento de cilindro en el que está; puesto que, si trazamos paralelas a AB, BΓ, ΓΔ, ΔA por los puntos EZHΘ y completamos los paralelogramos sobre las (rectas) AB, BΓ, ΓΔ, ΔA y levantamos, a partir de ellos, sólidos paralelepípedos de igual altura que el cilindro, los prismas sobre los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA son la mitad de cada uno de los levantados; y los segmentos del cilindro son menores que los sólidos paralelepípedos levantados; de modo que también los prismas (levantados) sobre los triángulos AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA son mayores que la mitad de los de los segmentos de cilindro en que están. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que han quedado y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos prismas de la misma altura que el cilindro sobre cada uno de los triángulos y procedemos así sucesivamente, dejaremos ciertos segmentos de cilindro que serán menores que el exceso con el que el cilindro excede al triple del cono [X 1]. Déjense y sean AE, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘA; entonces el prisma restante cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro es mayor que el triple del cono. Pero el prisma cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro es el triple de la pirámide cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono [XII 7 Por.]; luego la pirámide cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono es mayor que el cono que tiene como base el círculo ABΓΔ. Pero también es menor, porque está comprendida por él; lo cual es imposible. Por tanto el cilindro no es mayor que el triple del cono.



Digo ahora que el cilindro tampoco es menor que el triple del cono.

Pues, si fuera posible, sea el cilindro menor que el triple del cono; entonces, por inversión, el cono es mayor que la tercera parte del cilindro. Inscríbase el cuadrado ΑΒΓΔ en el círculo ΑΒΓΔ; entonces el cuadrado ΑΒΓΔ es mayor que la mitad del círculo ΑΒΓΔ. Y levántese sobre el cuadrado ΑΒΓΔ una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono; porque, como antes demostrábamos, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo, el cuadrado ΑΒΓΔ será la mitad del cuadrado circunscrito en torno al círculo; y si levantamos a partir de los cuadrados sólidos paralelepípedos de la misma altura que el cono que también se llaman prismas, el (sólido) levantado a partir del cuadrado ΑΒΓΔ será la mitad del levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo, porque son entre sí como sus bases [XI 32]; de modo que también los tercios (están en la misma razón); así pues, la pirámide cuya base es el cuadrado ΑΒΓΔ es la mitad de la pirámide levantada a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo. Y la pirámide levantada sobre el cuadrado circunscrito en torno al círculo es mayor que el cono, pues lo comprende; luego la pirámide cuya base es el cuadrado ΑΒΓΔ y su vértice el mismo que el del cono es mayor que la mitad del cono. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ por los puntos Ε, Ζ, Η, Θ y trácense ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; entonces, cada uno de los triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ es mayor que la mitad del segmento del círculo ΑΒΓΔ en el que está. Ahora bien, levántese sobre cada uno de los triángulos ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ pirámides que tengan el mismo vértice que el cono; entonces cada una de las pirámides levantadas de la misma manera es mayor que la mitad del segmento de cono en el que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que el cono y procedemos así sucesivamente, dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el exceso con que el cono excede a la tercera parte del cilindro [X 1]. Déjense y sean los de ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; entonces la pirámide restante cuya base es el polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ y su vértice el mismo que el del cono, es mayor que la tercera parte del cilindro. Pero la pirámide cuya base es el polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ y su vértice el mismo que el del cono es la tercera parte del prisma cuya base es el polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ y su altura la misma que la del cilindro; entonces el prisma cuya base es el polígono ΑΕΒΖΓΗΔΘ y su altura la misma que la del cilindro es mayor que el cilindro cuya base es el círculo ΑΒΓΔ. Pero también es menor, porque está comprendido por él; lo cual es imposible. Luego el cilindro no es menor que el triple del cono. Pero se ha demostrado que tampoco es mayor que el triple. Por tanto, el cilindro es el triple del cono; de modo que el cono es la tercera parte del cilindro.

Por consiguiente, todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que él e igual altura. Q. E. D.

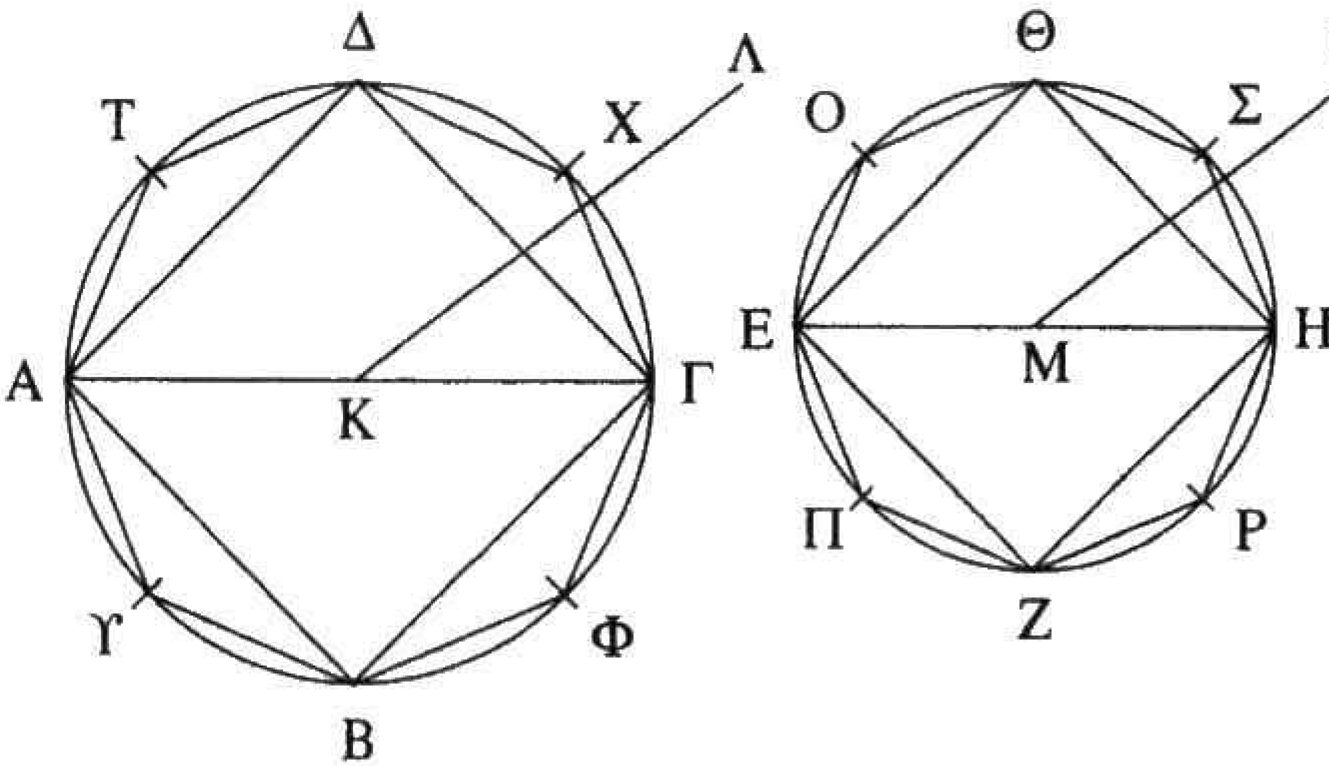
Proposición 11

Los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Haya unos conos y cilindros de la misma altura cuyas bases son los círculos ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, sus ejes ΚΛ, ΜΝ y los diámetros de sus bases ΑΓ, ΕΗ.

Digo que, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así el cono ΑΛ al cono ΕΝ.

Porque, si no, como el círculo ΑΒΓΔ, es al círculo ΕΖΗΘ, así será el cono ΑΛ o a un sólido menor o a uno mayor que el cono ΕΝ. Séalo en primer lugar al (sólido) menor Ξ, y sea el sólido Ψ igual a aquello en lo que el sólido Ξ es menor que el cono ΕΝ; entonces el cono ΕΝ es igual a los sólidos Ξ, Ψ. Inscríbase el cuadrado ΕΖΗΘ en el círculo ΕΖΗΘ; entonces el cuadrado es mayor que la mitad del círculo. Levántese a partir del cuadrado ΕΖΗΘ una pirámide de igual altura que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono: puesto que, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo y levantamos a partir de él una pirámide de igual altura que el cono, la pirámide inscrita es la mitad de la circunscrita, pues son entre sí como sus bases [XII 6]; mientras que el cono es menor que la pirámide circunscrita. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, por los puntos Ο, Π, Ρ, Σ, y trácense ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. Entonces, cada uno de los triángulos ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que está. Levántese sobre cada uno de los triángulos ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ una pirámide de igual altura a la del cono. Entonces cada una de las pirámides levantadas es mayor que la mitad del segmento de cono en que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides de igual altura a la del cono y procedemos así sucesivamente dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el sólido Ψ [X 1]. Déjense y sean los de ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ. Entonces, la pirámide restante cuya base es el polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ y su altura la misma que la del cono es mayor que el sólido Ξ. Inscríbase también en el círculo ΑΒΓΔ el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ semejante y situado de manera semejante al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ, y levántese sobre él una pirámide de igual altura que el cono ΑΛ. Pues bien, dado que, como el cuadrado de ΑΓ es al cuadrado de ΕΗ, así el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ [XII 1], mientras que, como el cuadrado de ΑΓ es al cuadrado de ΕΗ, así el círculo ΑΒΓΔ al círculo ΕΖΗΘ [XII 2], entonces, también, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ. Pero, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así el cono ΑΛ al sólido Ξ, y como el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ es al polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ así la pirámide cuya base es el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ y su vértice el punto Λ a la pirámide cuya base es el polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ y su vértice el punto Ν [XII 6]. Entonces, también, como el cono ΑΛ es al sólido Ξ, así la pirámide cuya base es el polígono ΔΤΑΥΒΦΓΧ y su vértice el punto Λ a la pirámide cuya base es el polígono ΘΟΕΠΖΡΗΣ y su vértice el punto Ν [V 11]. Luego, por alternancia, como el cono ΑΛ es a la pirámide (inscrita) en él, así el sólido Ξ a la pirámide (inscrita) en el cono EN [V 6]. Pero el cono ΑΛ es mayor que la pirámide (inscrita) en él; entonces, el sólido Ξ es mayor que la pirámide inscrita en el cono ΕΝ. Pero también menor; lo cual es absurdo; por tanto, el cono ΑΛ no es a un sólido menor que el cono ΕΝ como el círculo ΑΒΓΔ al círculo ΕΖΗΘ. De manera semejante demostraríamos que tampoco el cono ΕΝ es a algún sólido menor que el cono ΑΛ, como el círculo ΕΖΗΘ es al círculo ΑΒΓΔ.



Digo ahora que tampoco el cono ΑΛ es a algún sólido mayor que el cono ΕΝ como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ.

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor Ξ. Entonces, por inversión, como el círculo ΕΖΗΘ es al círculo ΑΒΓΔ, así el sólido Ξ al cono ΑΛ. Pero, como el sólido Ξ es al cono ΑΛ, así el cono ΕΝ a un sólido menor que el cono ΑΛ; entonces, también, como el círculo ΕΖΗΘ es al círculo ΑΒΓΔ, así el cono ΕΝ a un sólido menor que el cono ΑΛ; lo cual se ha demostrado que es imposible; luego el cono ΑΛ no es a un sólido mayor que el cono ΕΝ como el círculo ΑΒΓΔ al círculo ΕΖΗΘ. Pero se ha demostrado que tampoco lo es a uno menor; por tanto, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así el cono ΑΛ al cono ΕΝ.

Pero como el cono es al cono, así el cilindro al cilindro, porque cada uno es respectivamente el triple del otro [XII 10]. Luego también, como el círculo ΑΒΓΔ es al círculo ΕΖΗΘ, así los cilindros (levantados) sobre ellos (que son) de la misma altura.

Por consiguiente, los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. Q. E. D.

Proposición 12

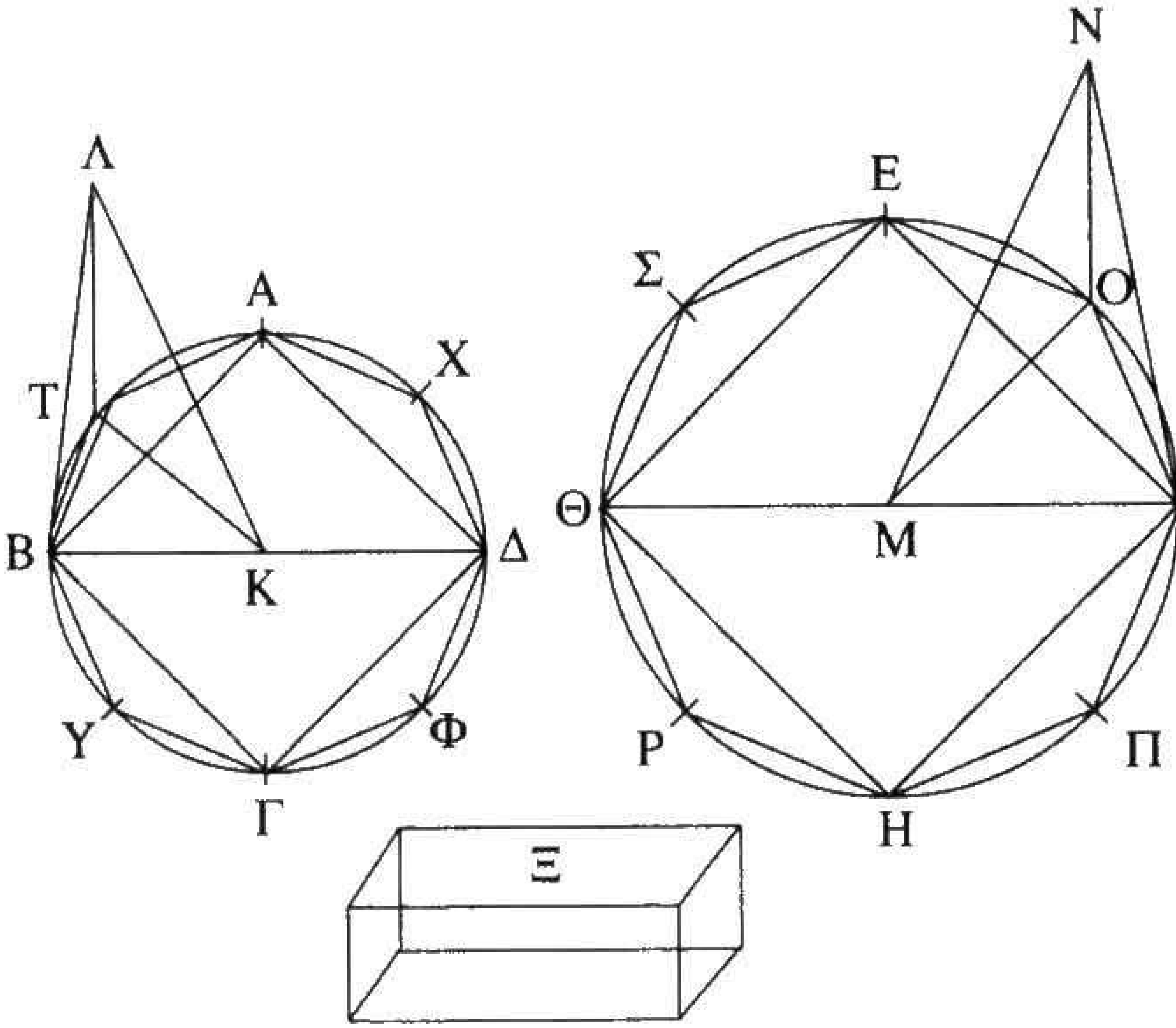
Los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de (la que guardan) los diámetros de sus bases.

Sean unos cilindros y conos semejantes cuyas bases son los círculos ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ; ΒΔ, ΖΘ los diámetros de sus bases y ΚΛ, ΜΝ los ejes de los conos y los cilindros.

Digo que el cono cuya base es el círculo ΑΒΓΔ y su vértice el punto Λ guarda con el cono cuya base es el círculo ΕΖΗΘ y su vértice el punto Ν una razón triplicada de la que ΒΔ (guarda) con ΖΘ.

Pues, si el cono ΑΒΓΔΛ no guarda con el cono ΕΖΗΘΝ una razón triplicada de la que ΒΔ guarda con ΖΘ, el cono ΑΒΓΔΛ guardará una razón triplicada con un sólido menor que el cono ΕΖΗΘΝ o con uno mayor. Guárdela, en primer lugar, con el sólido menor Ξ e inscríbase el cuadrado ΕΖΗΘ en el círculo ΕΖΗΘ [IV 6]; entonces el cuadrado ΕΖΗΘ es mayor que la mitad del círculo ΕΖΗΘ. Levántese sobre el cuadrado ΕΖΗΘ una pirámide que tenga la misma altura que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono. Ahora, divídanse en dos partes iguales las circunferencias ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ por los puntos Ο, Π, Ρ, Σ, y trácense ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. Entonces cada uno de los triángulos ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ es mayor que la mitad del segmento del círculo ΕΖΗΘ en el que está; levántese sobre cada uno de los triángulos ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono; entonces cada una de las pirámides levantadas es también mayor que la mitad del segmento de cono en el que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que el cono y procedemos así sucesivamente dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el exceso con el que el cono ΕΖΗΘΝ excede al sólido Ξ [X 1]. Déjense y sean los de ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ; entonces, la pirámide restante cuya base es el polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ y su vértice el punto Ν es mayor que el sólido Ξ. Inscríbase también en el círculo ΑΒΓΔ el polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ semejante y situado de manera semejante al polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ, y levántese sobre el polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono y sea ΛΒΤ uno de los triángulos que comprenden la pirámide cuya base es el polígono ΑΤΒΥΓΦΔΧ y su vértice el punto Λ y sea ΝΖΟ uno de los triángulos que comprenden la pirámide cuya base es el polígono ΕΟΖΠΗΡΘΣ y su vértice el punto Ν, y trácense ΚΤ, ΜΟ. Ahora bien, como el cono ΑΒΓΔΛ es semejante al cono ΕΖΗΘΝ, entonces, como ΒΔ es a ΖΘ, así el eje ΚΛ al eje ΜΝ [XI Def. 24]. Pero, como ΒΔ es a ΖΘ, así ΒΚ a ΖΜ; luego, como ΒΚ es a ΖΜ, así ΚΛ a ΜΝ. Y, por alternancia, como ΒΚ es a ΚΛ, así ΖΜ a ΜΝ [V 16]. Ahora bien, los lados que comprenden los ángulos iguales ΒΚΛ, ΖΜΝ son proporcionales; entonces, el triángulo ΒΚΛ es semejante al triángulo ΖΜΝ [VI 6]. A su vez, dado que, como ΒΚ es a ΚΤ, así ΖΜ a ΜΟ, y comprenden los ángulos iguales ΒΚΤ, ΖΜΟ: porque la parte que el ángulo ΒΚΤ es de los cuatro (ángulos) rectos correspondientes al centro Κ, la misma parte es también el ángulo ΖΜΟ de los cuatro (ángulos) rectos correspondientes al centro Μ; pues bien, como los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales, entonces el triángulo ΒΚΤ es semejante al triángulo ΖΜΟ [VI 6]. A su vez, puesto que se ha demostrado que, como ΒΚ es a ΚΛ, así ΖΜ a ΜΝ, y ΒΚ es igual a ΚΤ mientras que ΖΜ es igual a ΟΜ, entonces, como ΤΚ es a ΚΛ, así ΟΜ a ΜΝ. Y los lados que (comprenden) los ángulos iguales ΤΚΛ, ΟΜΝ —porque son rectos— son proporcionales; luego el triángulo ΛΚΤ es semejante al triángulo ΝΜΟ [VI 6]. Y como, por la semejanza de los triángulos ΛΚΒ, ΝΜΖ, como

ΛB es a BK, así NZ a ZM, y por la semejanza de los triángulos BKT, ZMO, como KB es a BT, así MZ a ZO, entonces, por igualdad, como ΛB es a BT, así NZ a ZO [V 22]. A su vez, dado que, por la semejanza de los triángulos ΛTK, NOM, como ΛT es a TK, así NO a OM, y por la semejanza de los triángulos TKB, OMZ, como KT es a TB, así MO a OZ, entonces, por igualdad, como ΛT es a TB, así NO a OZ [V 22]. Pero se ha demostrado que también, como TB es a BΛ, así OZ a ZN. Luego, por igualdad, como TΛ es a ΛB, así ON a NZ [V 22]. Por tanto, los lados de los triángulos ΛTB, NOZ son proporcionales; luego los triángulos ΛTB, NOZ son equiangulares [VI 5]; de modo que también son semejantes [VI Def. 1]. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo BKT y su vértice el punto Λ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ZMO y su vértice el punto N. Pues están comprendidas por planos semejantes e iguales en número [XI Def. 9]. Pero las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan entre sí una razón triplicada de la que guardan sus lados correspondientes [XII 8]. Luego la pirámide BKTΛ guarda con la pirámide ZMON una razón triplicada de la que BK guarda con ZM. De manera semejante, si trazamos rectas de los (puntos) A, X, Δ, Φ, Γ, Y al (punto) K y de los (puntos) E, Σ, Θ, P, H, Π al punto M, y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que los conos, demostraremos que cada una de las pirámides dispuestas de manera semejante guarda con cada una de las pirámides dispuestas de manera semejante una razón triplicada de la que el lado correspondiente BK guardará con el lado correspondiente ZM, es decir, de la que BΔ guarda con ZΘ. Y como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]; entonces, como la pirámide BKTΛ es a la pirámide ZMON, así la pirámide entera cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ a la pirámide entera cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N; de modo que también la pirámide cuya base es ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ guarda con la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que BΔ (guarda) con ZΘ. Pero se ha supuesto que también el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ guarda con el sólido Ξ una razón triplicada de la que BΔ (guarda) con ZΘ; entonces, como el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ es al sólido Ξ, así la pirámide cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ es a la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N. Entonces, por alternancia, como el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ es a la pirámide (inscrita) en él, cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto Λ, así el (sólido) Ξ a la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N [V 16]. Pero el antedicho cono es mayor que la pirámide (inscrita) en él: porque la comprende. Entonces el sólido Ξ es también mayor que la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto Λ no guarda con un sólido menor que el cono cuya base es el círculo EZHΘ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que BΔ guarda con ZΘ. De manera semejante demostraríamos que tampoco el cono EZHΘN guarda con un sólido menor que el cono ABΓΔΛ una razón triplicada de la que ZΘ (guarda) con BΔ.



Digo ahora que tampoco el cono ΑΒΓΔΛ guarda con un sólido mayor que el cono ΕΖΗΘΝ una razón triplicada de la que ΒΔ guarda con ΖΘ.

Pues, si fuera posible, guárdela con el (sólido) mayor Ξ. Entonces, por inversión, el sólido Ξ guarda con el cono ΑΒΓΔΛ una razón triplicada de la que ΖΘ (guarda) con ΒΔ. Pero, como el sólido Ξ es al cono ΑΒΓΔΛ, así el cono ΕΖΗΘΝ a un sólido menor que el cono ΑΒΓΔΛ. Entonces, también, el cono ΕΖΗΘΝ guarda con un sólido menor que el cono ΑΒΓΔΛ una razón triplicada de la que ΖΘ guarda con ΒΔ; lo cual se ha demostrado que es imposible; luego el cono ΑΒΓΔΛ no guarda con un sólido mayor que el cono ΕΖΗΘΝ una razón triplicada de la que ΒΔ guarda con ΖΘ. Pero se ha demostrado que tampoco con uno menor. Por tanto, el cono ΑΒΓΔΛ guarda con el cono ΕΖΗΘΝ una razón triplicada de la que ΒΔ guarda con ΖΘ.

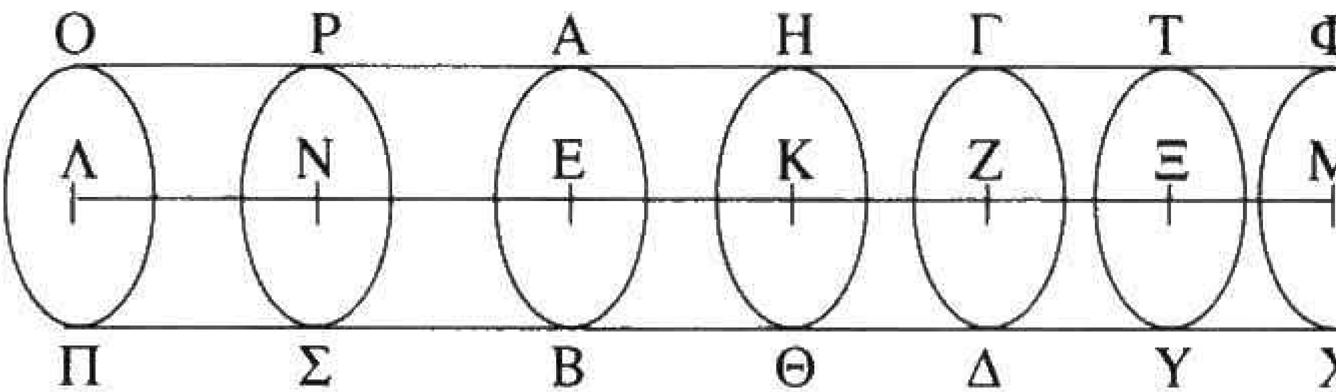
Ahora bien, como el cono es al cono, así el cilindro al cilindro: porque el cilindro es el triple del cono que está sobre la misma base y tiene igual altura que el propio cono [XII 10]. Luego el cilindro guarda con el cilindro una razón triplicada de la que BΔ (guarda) con ZΘ.

Por consiguiente, los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de las de los diámetros de sus bases. Q. E. D

Proposición 13

Si un cilindro es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como el cilindro es al cilindro, así el eje es al eje.

Sea cortado el cilindro AΔ por el plano HΘ que es paralelo a los planos opuestos AB, ΓΔ, y encuentre el plano HΘ al eje en el punto K.



Digo que, como el cilindro BH es al cilindro HΔ, así el eje EK al eje KZ.

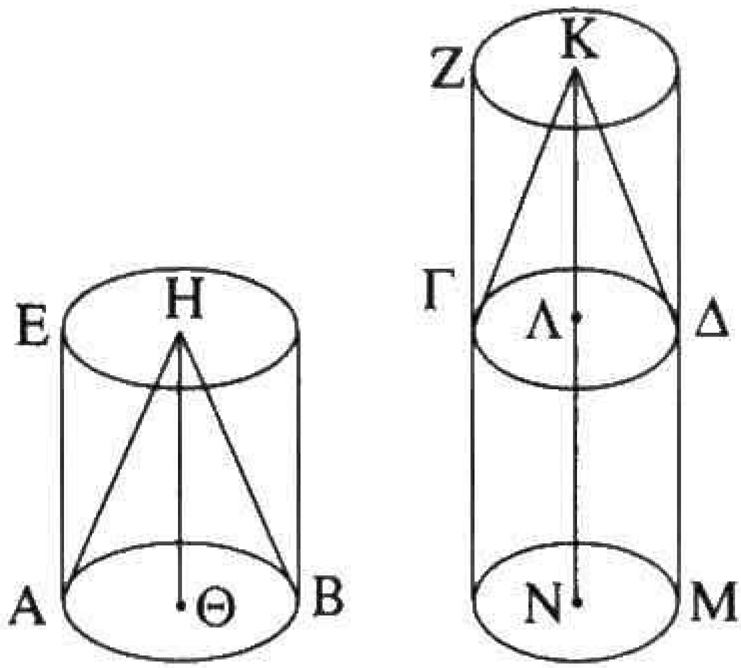
Prolónguese, pues, el eje EZ por cada lado hasta los puntos Λ, M y dispónganse cuantos ejes se quiera EN, NΛ iguales al eje EK y cuantos se quiera ZΞ, ΞM iguales a ZK. Y considérese sobre el eje ΛM el cilindro OX cuyas bases son los círculos OΠ, ΦX. Trácense, a través de los puntos N, Ξ, planos paralelos a AB, ΓΔ y a las bases del cilindro OX y háganse los círculos PΣ, TY en torno a los centros N, Ξ. Y como los ejes ΛN, NE, EK son iguales entre sí, entonces los cilindros ΠP, PB, BH son entre sí como sus bases [XII 11]; pero sus bases son iguales; luego los cilindros ΠP, PB, BH son iguales entre sí. Pues bien, como los ejes ΛN, NE, EK son iguales entre sí, y los cilindros ΠP, PB, BH también son iguales entre sí, y es igual el número (de los primeros) al número (de los segundos), entonces, el eje KΛ será el mismo múltiplo del eje EK que el cilindro ΠH del cilindro HB. Por lo mismo, entonces, el eje MK es el mismo múltiplo del eje KZ que el cilindro XH del cilindro HΔ. Y si el eje KΛ es igual al eje KM, el cilindro ΠH será también igual al cilindro HX, y si el eje es mayor que el eje, el cilindro será también mayor que el cilindro, y si es menor, menor. Entonces, siendo cuatro magnitudes los ejes EK, KZ y los cilindros BH, HΔ, se han tomado los equimúltiplos, a saber: el eje ΛK y el cilindro ΠH, del eje EK y el cilindro BH; y (equimúltiplos, a saber) el eje KM y el cilindro HX, del eje KZ y el cilindro HΔ; y se ha demostrado que si el eje KΛ excede al eje KM, también el cilindro ΠΗ excede al cilindro ΗΧ, y si es igual, igual y si menor, menor. Por tanto, como el eje ΕΚ es al eje ΚΖ, así el cilindro ΒΗ al cilindro ΗΔ [V Def. 5]. Q. E. D.

Proposición 14

Los conos y cilindros que están sobre bases iguales son entre sí como sus alturas.

Estén, pues, los cilindros ΕΒ, ΖΔ sobre bases iguales, a saber: los círculos ΑΒ, ΓΔ. Digo que, como el cilindro ΕΒ es al cilindro ΖΔ, así el eje ΗΘ al eje ΚΛ.

Pues prolónguese el eje ΚΛ hasta el punto Ν y hágase ΛΝ igual al eje ΗΘ, y considérese el cilindro ΓΜ en torno al eje ΛΝ. Pues bien, como los cilindros ΕΒ, ΓΜ tienen la misma altura, son entre sí como sus bases [XII 11]. Pero las bases son iguales entre sí; luego los cilindros ΕΒ, ΓΜ son también iguales. Y como el cilindro ΖΜ ha sido cortado por el plano ΓΔ que es paralelo a sus planos opuestos, entonces, como el cilindro ΓΜ es al cilindro ΖΔ, así el eje ΛΝ al eje ΚΛ [XII 13]. Pero el cilindro ΓΜ es igual al cilindro ΕΒ, y el eje ΛΝ al eje ΗΘ; luego, como el cilindro ΕΒ es al cilindro ΖΔ, así el eje ΗΘ al eje ΚΛ. Pero como el cilindro ΕΒ es al cilindro ΖΔ, así el cono ΑΒΗ al cono ΓΔΚ [XII 10]. Por tanto, como el eje ΗΘ es al eje ΚΛ, así el cono ΑΒΗ al cono ΓΔΚ y el cilindro ΕΒ al cilindro ΖΔ. [V Def. 5]. Q. E. D.



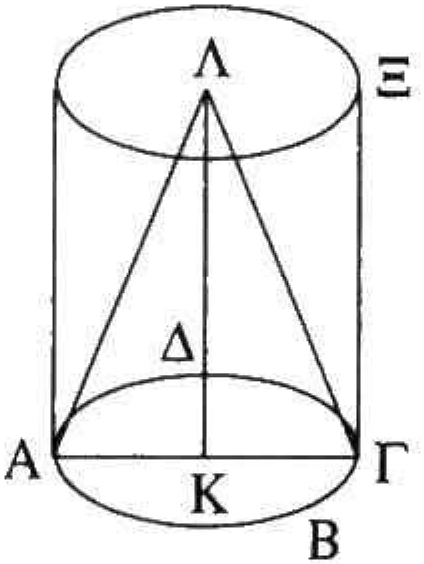
Proposición 15

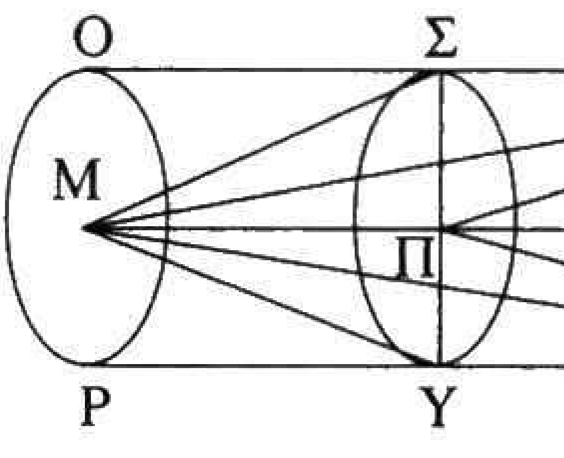
Las bases de los conos y cilindros iguales están inversamente relacionadas con las alturas, y aquellos conos y cilindros cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Sean iguales los conos y cilindros cuyas bases son los círculos ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ; sean ΑΓ, ΕΗ los diámetros (de las bases) y ΚΛ, ΜΝ los ejes que son también las alturas de los conos o cilindros, y complétense los cilindros ΑΞ, ΕΟ.

Digo que las bases de los cilindros ΑΞ, ΕΟ están inversamente relacionadas con sus alturas, y como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así la altura ΜΝ a la altura ΚΛ.

Pues la altura ΛΚ o es igual a la altura ΜΝ o no lo es. Sea en primer lugar igual, y el cilindro ΑΞ es también igual al cilindro ΕΟ. Pero los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XII 11]; entonces, la base ΑΒΓΔ es igual a la base ΕΖΗΘ. De modo que también, en razón inversa, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así la altura ΜΝ a la altura ΚΛ. Pero ahora no sea la altura ΛΚ igual a la altura ΜΝ sino que sea mayor ΜΝ, y quítese de la altura ΜΝ, ΠΝ igual a ΚΛ, y córtese el cilindro ΕΟ por el punto Π con el plano ΤΥΣ paralelo a los planos de los círculos ΕΖΗΘ, ΡΟ, y considérese el cilindro ΕΣ (levantado) a partir del círculo ΕΖΗΘ como base y con la altura ΝΠ. Ahora bien, como el cilindro ΑΞ es igual al cilindro ΕΟ, entonces, como el cilindro ΑΞ es al cilindro ΕΣ, así el cilindro ΕΟ al cilindro ΕΣ [V 7]. Pero como el cilindro ΑΗ es al cilindro ΕΣ, así la base ΑΒΓΔ a la base ΕΖΗΘ: porque los cilindros ΑΞ, ΕΣ tienen la misma altura [XII 11]; y como el cilindro ΕΟ es al cilindro ΕΣ, así la altura ΜΝ a la altura ΠΝ: porque el cilindro ΕΟ ha sido cortado por un plano que es paralelo a sus planos opuestos [XII 13]. Luego, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así la altura ΜΝ a la altura ΠΝ [V 11]. Pero la altura ΠΝ es igual a la altura ΚΛ; entonces, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así la altura ΜΝ a la altura ΚΛ. Por tanto, las bases de los cilindros ΑΞ, ΕΟ están inversamente relacionadas con sus alturas.





Pero, ahora, estén las bases de los cilindros ΑΞ, ΕΟ inversamente relacionadas con sus alturas, y, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así la altura ΜΝ a la altura ΚΛ.

Digo que el cilindro ΑΞ es igual al cilindro ΕΟ.

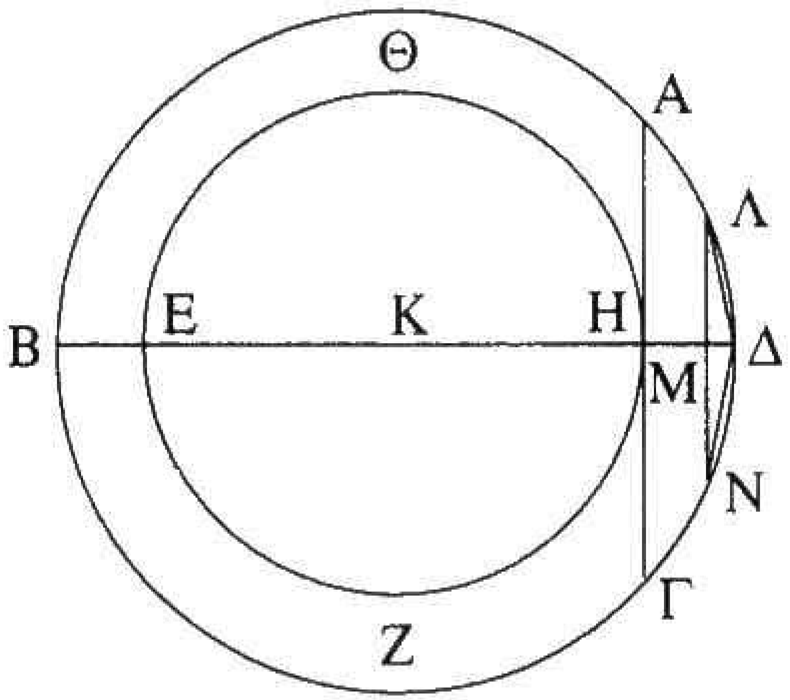
Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así la altura ΜΝ a la altura ΚΛ, mientras que la altura ΚΛ es igual a la altura ΠΝ, entonces, como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así la altura ΜΝ a la altura ΠΝ. Pero como la base ΑΒΓΔ es a la base ΕΖΗΘ, así el cilindro ΑΞ al cilindro ΕΣ: porque tienen la misma altura [XII 11]; y como la altura ΜΝ es a la altura ΠΝ, así el cilindro ΕΟ al cilindro ΕΣ [XII 13]; entonces, como el cilindro ΑΞ es al cilindro ΕΣ, así el cilindro ΕΟ al cilindro ΕΣ [V 11]. Por tanto el cilindro ΑΞ es igual al cilindro ΕΟ [V 9]. Y de la misma forma también en (el caso de) los conos. Q. E. D.

Pproposición 16

Dados dos círculos con el mismo centro, inscribir en el círculo mayor un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque al círculo menor.

Sean ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ los dos círculos con el mismo centro Κ.

Así pues, hay que inscribir en el círculo mayor ΑΒΓΔ un polígono equilátero y con un número par de lados que no toque al círculo ΕΖΗΘ.



Trácese, pues, por el centro Κ, la recta ΒΚΔ, y trácese, por el punto Η, la (recta) ΗΑ formando ángulos rectos con la recta ΒΔ y prolónguese hasta el punto Γ; entonces ΑΓ toca el círculo ΕΖΗΘ [III 16 Por.]. Ahora, si dividimos en dos partes iguales la circunferencia ΒΑΔ, y su mitad en dos partes iguales, y procedemos así sucesivamente, dejaremos una circunferencia menor que ΑΔ; déjese y sea ΛΔ; trácese, de Λ a ΒΔ, la perpendicular ΛΜ y prolónguese hasta Ν, y trácense ΛΔ, ΔΝ; entonces ΛΔ es igual a ΔΝ [III 3; I 4]. Y como ΛΝ es paralela a ΑΓ y ΑΓ toca el círculo ΕΖΗΘ, entonces, ΛΝ no toca el círculo EZHΘ; luego ΛΔ, ΔN están lejos de tocar el círculo EZHΘ. Ahora, si adaptamos sucesivamente rectas iguales a ΛΔ al círculo ABΓΔ inscribiremos en el círculo ABΓΔ un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque el círculo menor EZHΘ. Q. E. F.

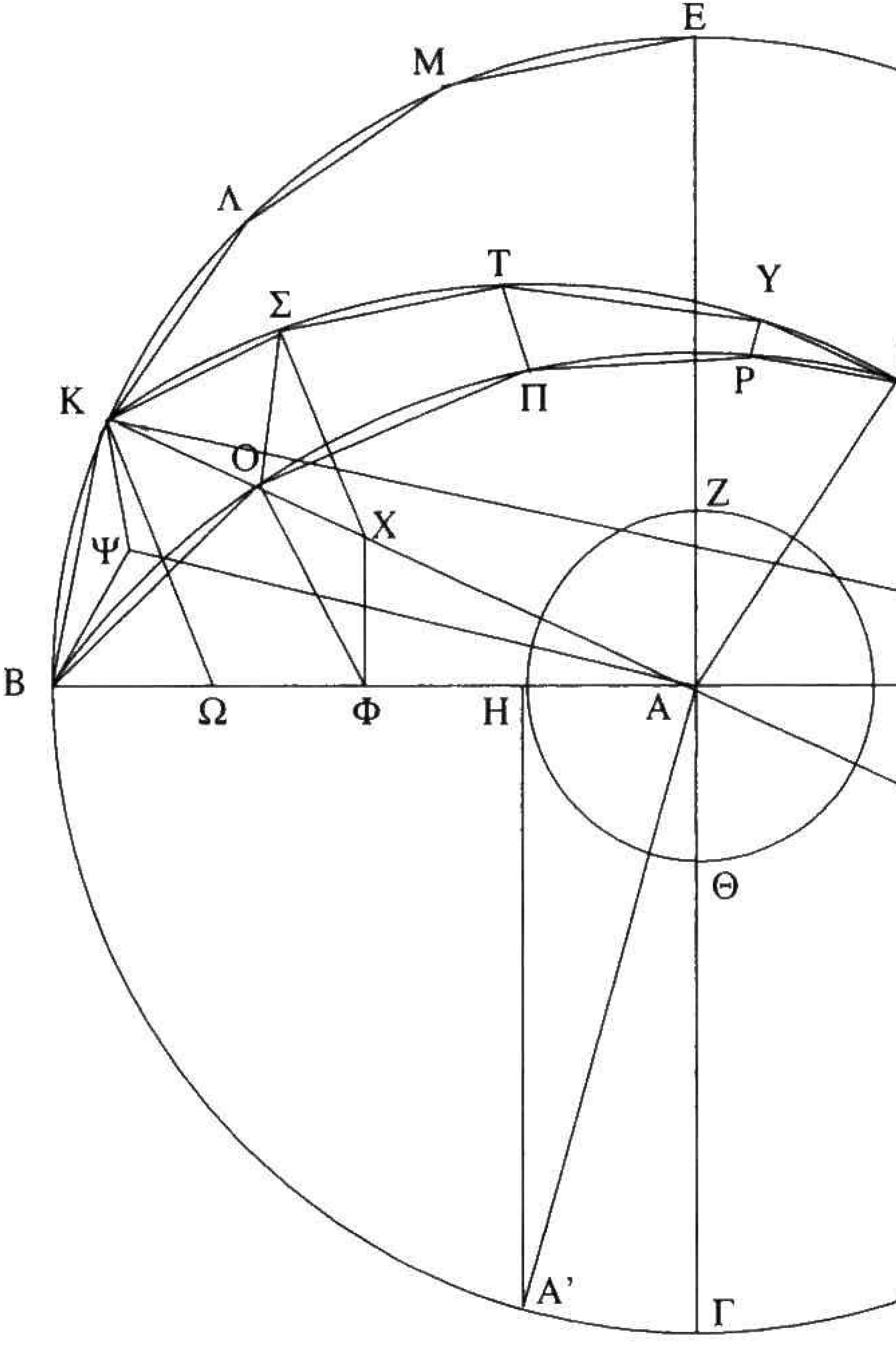
Proposición 17

Dadas dos esferas con el mismo centro, inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.

Considérense dos esferas con el mismo centro A.

Así pues, hay que inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.

Córtense las esferas por un plano a través del centro; entonces las secciones serán círculos: porque la esfera se generaba permaneciendo fijo el diámetro y haciendo girar el semicírculo en torno a él [XI Def. 14]; de modo que sea cual sea la posición en que consideremos el semicírculo, el plano trazado a través de él producirá un círculo en la superficie de la esfera. Y está claro que también es el máximo posible: porque el diámetro de la esfera que es el diámetro del semicírculo y, por supuesto, del círculo, es mayor que todas las (rectas) trazadas en el círculo o en la esfera. Así pues, sea BΓΔE el círculo en la esfera mayor, y el círculo ZHΘ el círculo en la esfera menor, y trácense sus dos diámetros BΔ, ΓE que forman ángulos rectos entre sí, y, dados los dos círculos BΓΔE, ZHΘ con el mismo centro, inscríbase en el círculo mayor BΓΔE, un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque al círculo menor ZHΘ; sean BK, KΛ, ΛM, ME sus lados en el cuadrante BE, y una vez trazada KA, prolónguese hasta N, y levántese a partir del punto A, AΞ formando ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE y encuentre la superficie de la esfera en el punto Ξ; trácense planos a través de AΞ y cada una de las (rectas) BΔ, KN; entonces, por las razones antedichas producirán círculos máximos en la superficie de la esfera. Prodúzcanse y sean BΞΔ, KΞN sus semicírculos sobre los diámetros BΔ, KN. Y puesto que ΞA forma ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE., entonces, todos los planos que pasan por ΞA forman ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE [XI 18]; de modo que los semicírculos BΞΔ, KΞN forman ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE. Y como BEΔ, BΞΔ, KΞN son semicírculos iguales —porque tienen los diámetros iguales BΔ, KN —los cuadrantes BE, BΞ, KΞ son iguales entre sí. Entonces, cuantos lados del polígono hay en el cuadrante BE, tantos hay también en los cuadrantes BΞ, KΞ, iguales a las rectas BK, KΛ, ΛM, ME. Inscríbanse y sean BO, OΠ, ΠP, PΞ, KΣ, ΣT, TY, YΞ, y trácense ΣO, TΠ, YP, y trácense, desde los puntos O, Σ perpendiculares al plano del círculo BΓΔE [XI 11]; entonces, caerán sobre las secciones comunes de los planos BΔ, KN: porque los planos de los (semicírculos) BΞΔ, KΞN forman ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE. Caigan y sean OΦ, ΣX, y trácese XΦ. Ahora bien, como en los semicírculos iguales BΞΔ, KΞN se han quitado las (rectas) iguales BO, KΣ y se han trazado las perpendiculares OΦ, ΞX; (entonces) OΦ es igual a ΣX y BΦ a KX [III 27 y I 26]. Pero la (recta) entera BA también es igual a la (recta) entera KA; entonces, la restante ΦA es igual a la restante XA; luego, como BΦ es a ΦA, así KX a XA; por tanto, ΞΦ es paralela a KB [VI 2]. Y como cada una de las (rectas) OΦ, ΣX forma ángulos rectos con el plano del círculo BΓΔE, entonces OΦ es paralela a ΣX [XI 6]. Pero se ha demostrado que es igual a ella; luego XΦ, ΣO son también iguales y paralelas [I 33]. Y como XΦ es paralela a ΣO, mientras que XΦ es paralela a KB; entonces ΣO es también paralela a KB [XI 9]. Y BO, KΣ las unen (por sus extremos), entonces, el cuadrilátero KBOΣ está en un plano: porque, si hay dos rectas paralelas y se toman puntos al azar en ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas [XI 7]. Por lo mismo, entonces, cada uno de los cuadriláteros ΣOΠT, TΠPY están también en un plano [XI 2]. Y también el triángulo YPΞ está en un plano. Entonces, si consideramos rectas trazadas desde los puntos O, Σ, Π, T, P, Y hasta el (punto) A, se construirá una figura poliédrica sólida entre las circunferencias BΞ, KΞ compuesta de pirámides cuyas bases son los cuadriláteros KBOΣ, ΣOΠT, TΠPY y el triángulo YPΞ y el vértice el punto A. Pero, si seguimos la misma construcción en el caso de cada uno de los lados KΛ, ΛM, ME, como en el caso de BK, y además en el caso de los tres cuadrantes que quedan, se construirá una figura poliédrica inscrita en la esfera comprendida por pirámides cuyas bases son dichos cuadriláteros y el triángulo YPΞ y los correspondientes a ellos y su vértice el punto A.


E
M
Λ
T
Υ
Σ
K
Π
P
O
Z
X
Ψ
B
Ω
Φ
H
A
Θ
A'
Γ

Digo que dicho poliedro no tocará la esfera menor en la superficie en la que está el círculo ZHΘ.

Trácese del punto A al plano del cuadrilátero KBOΣ la perpendicular Aψ y encuentre el plano en el punto ψ [XI 11], y trácense ψB, ψK. Ahora bien, como Aψ forma ángulos rectos con el plano del cuadrilátero KBOΣ, entonces también forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano del cuadrilátero [XI Def. 3]. Luego Aψ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) Bψ, ψK. Y como AB es igual a AK, el cuadrado de AB es también igual al cuadrado de AK. Y los cuadrados de Aψ, ψB son iguales al cuadrado de AB: porque el ángulo correspondiente a ψ es recto [I 47]. Y los cuadrados Aψ, ψK son iguales al cuadrado de AK [id.]. Luego los cuadrados de Aψ, ψB son iguales a los cuadrados de Aψ, ψK. Quítese de ambos el de Aψ; entonces el cuadrado restante, el de Bψ, es igual al cuadrado restante, el de ψK; luego Bψ es igual a ψK. Demostraríamos de manera semejante que las rectas trazadas desde ψ hasta O, Σ son iguales a cada una de las (rectas) Bψ, ψK. Luego el círculo descrito con centro ψ y, como distancia, una de las (rectas) ψB, ψK pasará también a través de O, Σ y KBOΣ será un cuadrilátero en un círculo.

Y como KB es mayor que XΦ, mientras que XΦ es igual a ΣO, entonces KB es mayor que ΣO. Pero KB es igual que cada una de las (rectas) KΣ, BO; luego cada una de las (rectas) KΣ, BO es mayor que Σ. Y como KBOΣ es un cuadrilátero en un círculo, y KB, BO, KΣ son iguales y OΣ menor y Bψ es el radio del círculo, entonces, el cuadrado de KB es mayor que el doble del cuadrado de Bψ. Trácese la perpendicular KΩ del (punto) K a la (recta) BΦ. Y como BΔ es menor que el doble de ΔΩ, y, como BΔ es a ΔΩ, así el (rectángulo comprendido) por ΔB, BΩ al (rectángulo comprendido) por ΔΩ, ΩB, si construimos el cuadrado de BΩ y completamos el paralelogramo sobre ΩΔ, entonces, el (rectángulo comprendido) por ΔB, BΩ es menor que el doble del (rectángulo comprendido) por ΔΩ, ΩB. Y si se traza KΔ, el (rectángulo comprendido) por ΔB, BΩ es igual al cuadrado de BK, y el (rectángulo comprendido) por ΔΩ, ΩB es igual al cuadrado de KΩ [III 31, VI 8 y Por.]; luego el cuadrado de KB es menor que el doble del cuadrado de KΩ. Pero el cuadrado de KB es mayor que el doble del cuadrado de Bψ; entonces el cuadrado de KΩ es mayor que el cuadrado de Bψ. Ahora bien, como BA es igual a KA, el cuadrado de BA es igual al cuadrado de AK. Y los cuadrados de Bψ, ψA son iguales al cuadrado de BA, y los cuadrados de KΩ, ΩA son iguales al cuadrado de KA [I 47]; luego los cuadrados de Bψ, ψA son iguales a los cuadrados de KΩ, ΩA, de los cuales el cuadrado de KΩ es mayor que el de Bψ; por tanto, el cuadrado restante, el de ΩA es menor que el cuadrado de ψA. Luego Aψ es mayor que AΩ; entonces Aψ es mucho mayor que AH. Y Aψ está en una base del poliedro y AH en la superficie de la esfera menor; de modo que el poliedro no toca la esfera menor en su superficie.

Por consiguiente, dadas dos esferas con el mismo centro, se ha inscrito, en la esfera mayor, un sólido poliedro que no toca la esfera menor en su superficie. Q. E. F.

Porisma:

Pero también, si se inscribe en otra esfera un sólido poliedro semejante al sólido poliedro inscrito en la esfera BΓΔE, el sólido poliedro (inscrito) en la esfera BΓΔE guarda con el sólido poliedro (inscrito) en la otra esfera una razón triplicada de la que el diámetro de la esfera BΓΔE guarda con el diámetro de la otra esfera. Pues si se dividen los sólidos en sus pirámides semejantes en número y disposición, las pirámides serán semejantes. Pero las pirámides semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes [XII 8 Por.]. Entonces, la pirámide cuya base es el cuadrilátero ΚΒΟΣ y su vértice el punto Α guarda con la pirámide dispuesta de modo semejante en la otra esfera una razón triplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente, es decir, de la que el radio ΑΒ de la esfera con centro Α (guarda) con el radio de la otra esfera. De manera semejante, cada pirámide de las de la esfera con centro Α guardará con cada pirámide dispuesta de manera semejante de la otra esfera una razón triplicada de la que (guarda) ΑΒ con el radio de la otra esfera. Ahora bien, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]; de modo que el sólido poliedro entero (inscrito) en la esfera con centro Α guardará con el sólido poliedro entero (inscrito) en la otra esfera una razón triplicada de la que ΑΒ guarda con el radio de la otra esfera, es decir, de la que el diámetro ΒΔ guarda con el diámetro de la otra esfera. Q. E. D.

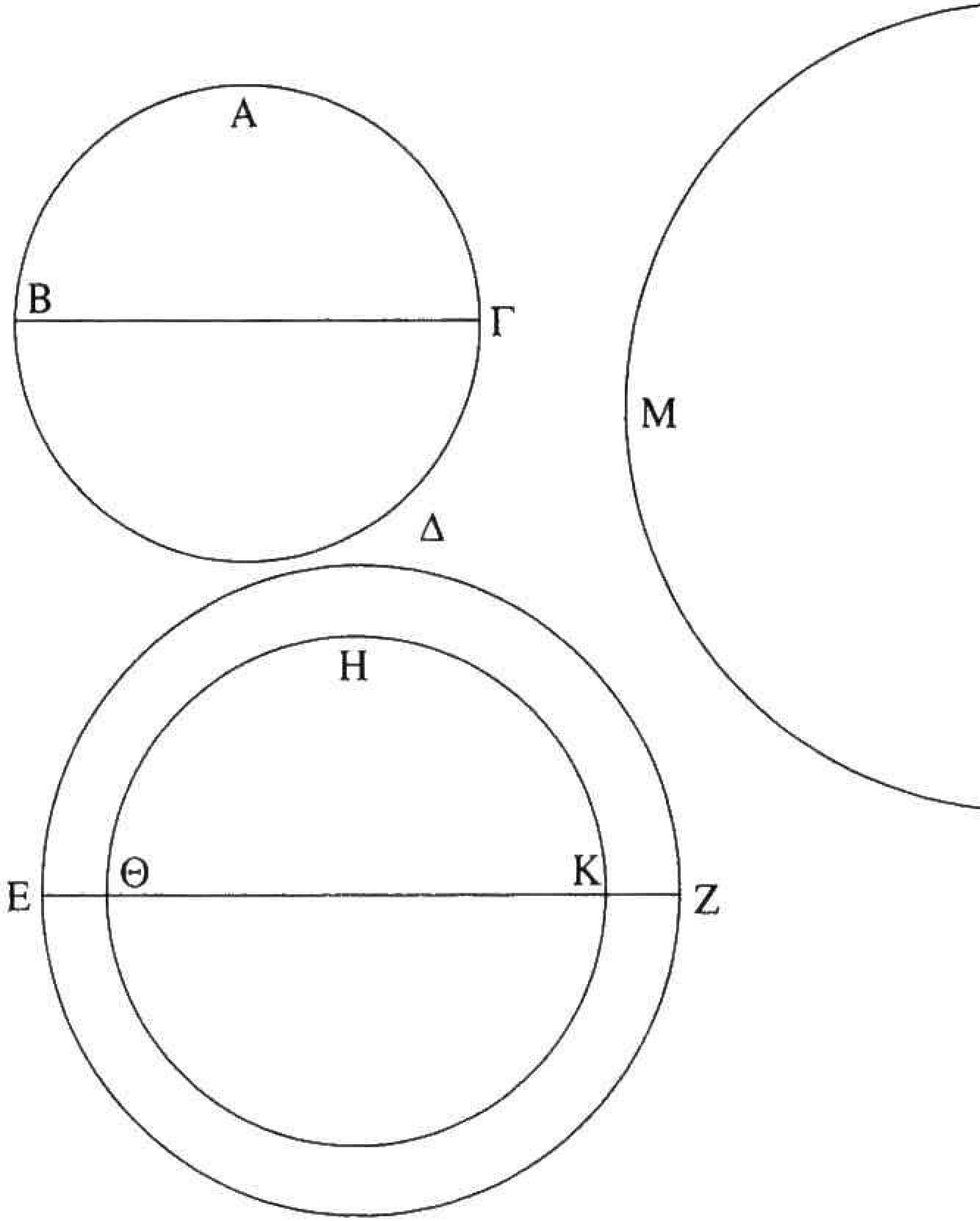
Proposición 18

Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros.

Consideremos las esferas ΑΒΓ, ΔΕΖ y sus diámetros ΒΓ, ΕΖ.

Digo que la esfera ΑΒΓ guarda con la esfera ΔΕΖ una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ.

Pues, si la esfera ΑΒΓ no guarda con la esfera ΔΕΖ una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ, entonces, la esfera ΑΒΓ guardará una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ con una esfera menor que ΔΕΖ o con una mayor. Guárdela en primer lugar con la (esfera) menor ΗΘΚ, y considérese ΔΕΖ en torno al mismo centro que ΗΘΚ, e inscríbase en la esfera mayor el sólido poliedro ΔΕΖ que no toque la esfera menor ΗΘΚ en su superficie [XII 17], e inscríbase también en la esfera ΑΒΓ un sólido poliedro semejante al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔΕΖ; entonces el sólido poliedro (inscrito) en ΑΒΓ guarda con el sólido poliedro (inscrito) en ΔΕΖ una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ [XII 17 Por.]. Pero la esfera ΑΒΓ guarda con la esfera ΗΘΚ una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ; luego, como la esfera ΑΒΓ es a la esfera ΗΘΚ, así el sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΑΒΓ al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔΕΖ; y, por alternancia, como la esfera ΑΒΓ es al sólido poliedro (inscrito) en ella, así la esfera ΗΘΚ al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔΕΖ [V 16]. Pero la esfera ΑΒΓ es mayor que el poliedro (inscrito) en ella; luego la esfera ΗΘΚ es también mayor que el sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔΕΖ. Pero también menor –porque es comprendida por él– por tanto, la esfera ΑΒΓ no guarda con una esfera menor que ΔΕΖ una razón triplicada de la que el diámetro ΒΓ guarda con el (diámetro) ΕΖ. De manera semejante demostraríamos que la esfera ΔΕΖ tampoco guarda con una esfera menor que ΑΒΓ una razón triplicada de la que ΕΖ guarda con ΒΓ.



Digo ahora que la esfera ΑΒΓ tampoco guarda con una esfera mayor que ΔΕΖ una razón triplicada de la que ΒΓ guarda con ΕΖ.

Pues, si fuera posible, guárdela con la mayor ΛMN; entonces, por inversión, la esfera ΛMN guarda con la esfera ABΓ una razón triplicada de la que el diámetro EZ guarda con el diámetro BΓ. Pero, como la esfera ΛMN es a la esfera ABΓ, así la esfera ΔEZ a una esfera menor que ABΓ; porque ΛMN es mayor que ΔEZ, según se ha demostrado antes [XII 2 Lema]. Entonces la esfera ΔEZ guarda con una esfera menor que la esfera ABΓ una razón triplicada de la que EZ guarda con BΓ; lo cual se ha demostrado que es imposible. Por tanto, la esfera ABΓ no guarda con una esfera mayor que ΔEZ una razón triplicada de la que BΓ guarda con EZ. Pero se ha demostrado que tampoco con una menor.

Por consiguiente, la esfera ABΓ guarda con la esfera ΔEZ una razón triplicada de la que BΓ guarda con EZ. Q. E. D.

[65] Cf. EUCLIDES, *Elementos I-IV,* nota 84, pág. 292.

[66] La tradición ha atribuido la prueba de este teorema a Hipócrates. Sin embargo parece más verosímil atribuir su conocimiento a Eudoxo a juzgar por la referencia expresa de Arquímedes que remite a Eudoxo los resultados de XII, 7 Por. y XII 10. Lo esencial en esta proposición es probar que se puede utilizar el método de exhausción con un círculo en el sentido de X 1, inscribiendo sucesivamente en él polígonos regulares cada uno de los cuales tiene el doble de lados que el precedente. Pueden verse más detalles sobre esta prueba concreta y sobre el mal llamado método «de exhausción» en general, en L. VEGA, *La trama de la demostración,* págs. 352-55. Recientemente ha vuelto sobre el uso euclídeo de la exhausción en el contexto del libro XII J. L. GARDIES, «L'organisation du libre XII des *Eléments* d'Euclides et ses anomalies», *Révue d'Histoire des Sciences,* XLVII/2 (1994), 189-208.

[67] Respeto la terminología de Euclides que utiliza la palabra *diámetros* para la diagonal (Cf. *Elementos I–IV,* nota 9, pág. 194).

[68] Según Vera se trata de una ingeniosa demostración con la que Euclides se topó por una afortunada coincidencia. Vera aduce a este respecto las palabras de Beppo Levi: «profundizando en el método de exhausción, Euclides habría podido llegar al resultado directamente por el razonamiento anterior. Este paso lo hizo Arquímedes en el tratado de la cuadratura de la parábola, problema que, como sabemos, se puede considerar como una transposición del problema del volumen de la pirámide.» (Cf. VERA, *op. cit.,* pág. 951).

[69] Al parecer no faltan motivos para dudar de la autenticidad del porisma. P sólo lo tiene en el margen, aunque es de la primera mano.

LIBRO DECIMOTERCERO

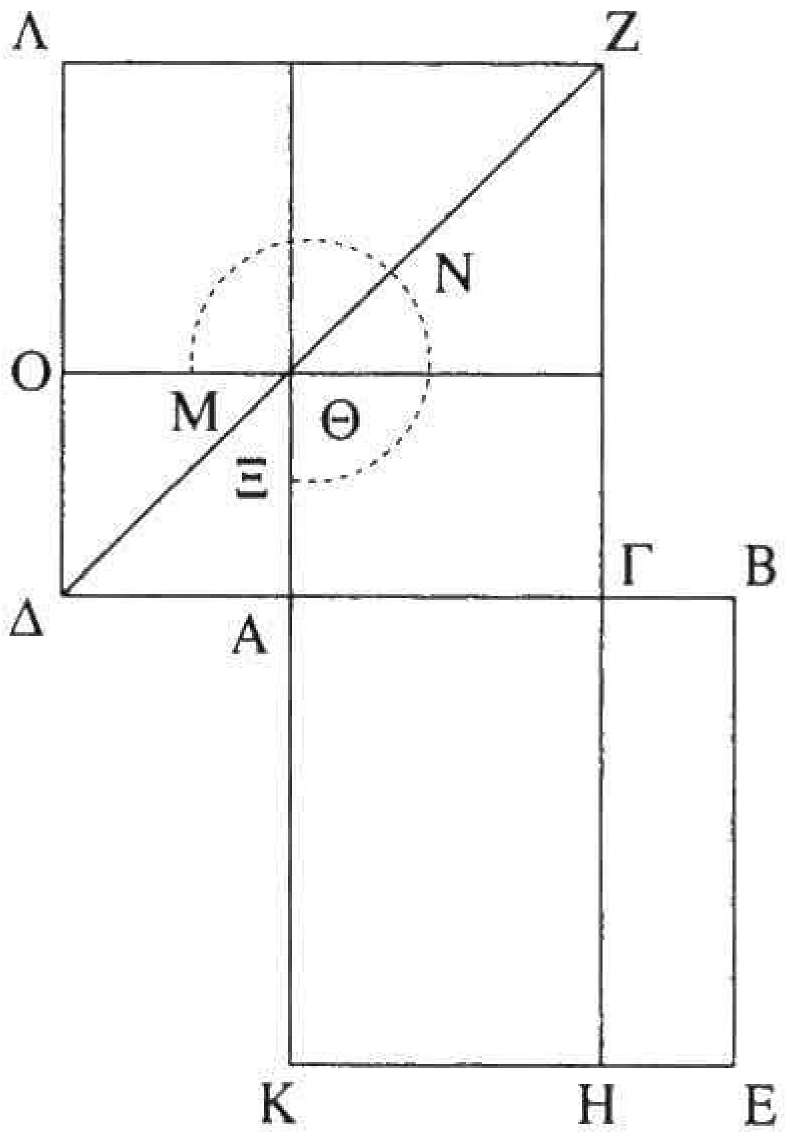
PROPOSICIÓN 1

Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la (recta) entera es cinco veces el cuadrado de la mitad.

Córtese pues la línea recta AB en extrema y media razón por el punto Γ, y sea ΑΓ el segmento mayor, prolónguese la recta ΑΔ en línea recta con ΓΑ y hágase ΑΔ (igual a) la mitad de AB.

Digo que el cuadrado de ΓΔ es cinco veces el cuadrado de ΔΑ.

Pues constrúyanse los cuadrados AE, ΔZ de AB, ΔΓ e inscríbase la figura en ΔZ; prolónguese ZΓ hasta H. Ahora bien, como AB se ha dividido en extrema y media razón por Γ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, ΒΓ es igual al cuadrado de ΑΓ [VI Def. 3 y VI 17]. Y el (rectángulo comprendido) por AB, ΒΓ es ΓΕ, mientras que el (cuadrado) de ΑΓ es ZΘ; entonces, ΓΕ es igual a ZΘ. Y como BA es el doble de ΑΔ, mientras que BA es igual a KA y ΑΔ a ΑΘ, entonces KA también es el doble de ΑΘ. Pero, como KA es a ΑΘ, así ΓΚ a ΓΘ [VI 1]; luego ΓΚ es el doble de ΓΘ. Pero también ΛΘ, ΘΓ son el doble de ΓΘ. Entonces ΚΓ es igual a ΛΘ, ΘΓ. Pero se ha demostrado que ΓΕ también es igual a ΘZ; luego el cuadrado entero AE es igual al gnomon [II Def. 2] MNΞ. Y como BA es el doble de ΑΔ, el cuadrado de BA es el cuádruple del cuadrado de ΑΔ, es decir, AE (el cuádruple) de ΔΘ. Pero AE es igual al gnomon [II Def. 2] MNΞ; entonces el gnomon MNΞ es el cuádruple de AO; luego el (cuadrado) entero ΔZ es cinco veces AO. Ahora bien, ΔZ es el cuadrado de ΔΓ, mientras que AO es el cuadrado de ΔΑ; por tanto, el cuadrado de ΓΔ es cinco veces el cuadrado de ΔΑ.



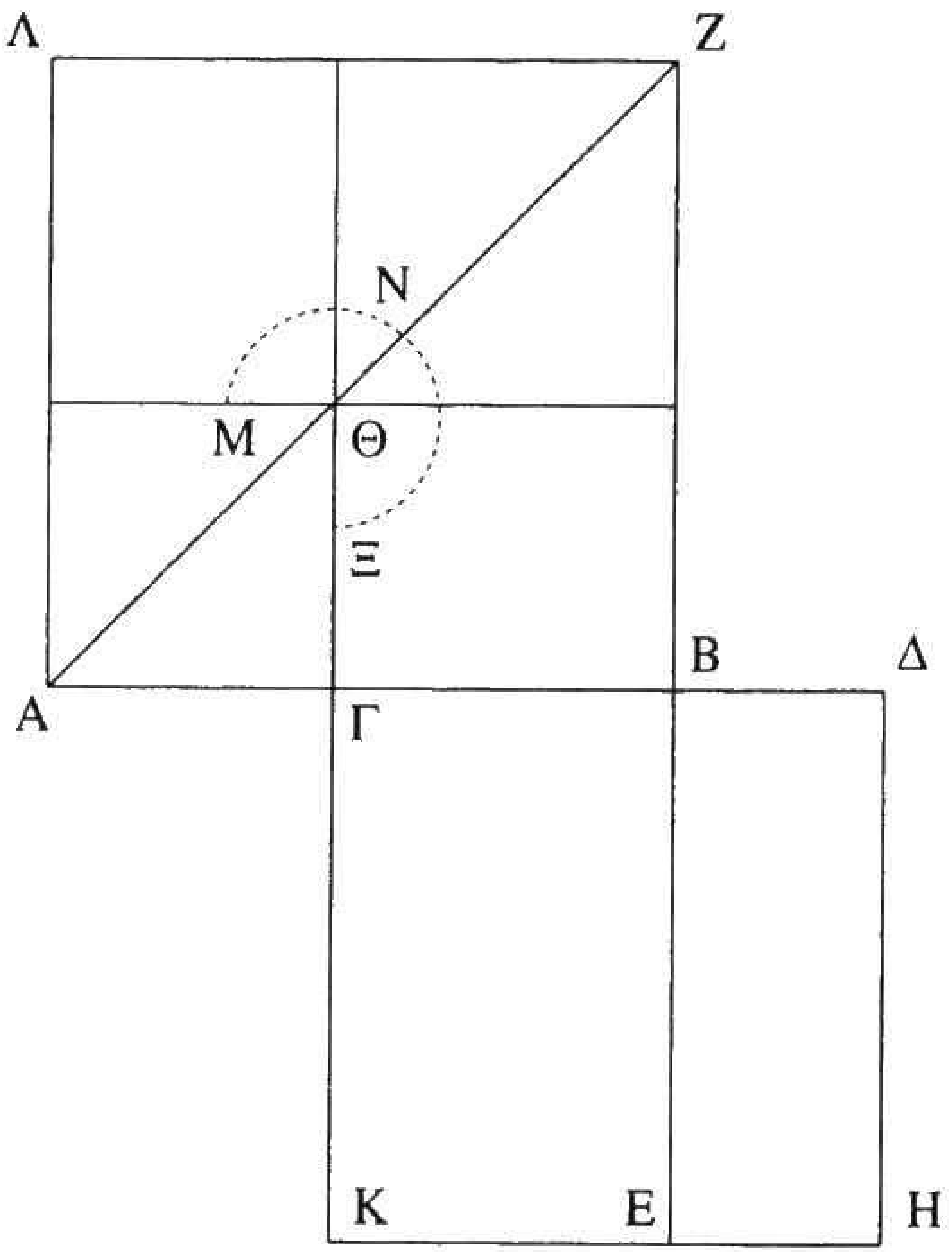
Por consiguiente, si se corta una recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la (recta) entera es cinco veces el cuadrado de la mitad. Q. E. D.[70].

Proposición 2

Si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial.

Sea, pues, el cuadrado de la línea recta AB cinco veces el de su segmento AΓ, y sea ΓΔ el doble de AΓ.

Digo que si se corta ΓΔ en extrema y media razón, el segmento mayor es ΓB.



Pues constrúyanse los cuadrados AZ, ΓH de AB, ΓΔ respectivamente, e inscríbase la figura en AZ; trácese BE. Y como el cuadrado de BA es cinco veces el de AΓ, el cuadrado de AZ es cinco veces el de AΘ. Entonces el gnomon MNΞ es el cuádruple de AΘ. Y como ΔΓ es el doble de ΓA, entonces el cuadrado de ΔΓ es el cuádruple del cuadrado de ΓA, es decir ΓH el (cuádruple) de AΘ. Pero se ha demostrado que el gnomon MNΞ también es el cuádruple de AΘ; luego el gnomon MNΞ es igual a ΓH. Y como ΔΓ es el doble de ΓA, mientras que ΔΓ es igual a ΓK, y AΓ a ΓΘ, entonces KB es también el doble de BΘ [VI 1]. Pero ΛΘ, ΘB son el doble de ΘB; luego KB es igual a ΛΘ, ΘB. Pero se ha demostrado que el gnomon entero MNΞ es igual al (cuadrado) entero ΓH; entonces el resto ΘZ es igual a BH. Y BH es el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, ΔB, porque ΓΔ es igual a ΔH; pero ΘZ es el cuadrado de ΓB; luego el (rectángulo comprendido) por ΓΔ, ΔB es igual al cuadrado de ΓB. Por tanto, como ΔΓ es a ΓB, así ΓB a BΔ. Ahora bien, ΔΓ es mayor que ΓB, entonces también ΓB es mayor que BΔ. Luego, cuando se corta la recta ΓΔ en extrema y media razón, el segmento mayor es ΓB.

Por consiguiente, si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar como sigue que el doble de AΓ es mayor que BΓ.

Porque, si no, sea BΓ, si es posible, el doble de ΓA; entonces, el cuadrado de BΓ es cuatro veces el de ΓA; luego los cuadrados de BΓ, ΓA son cinco veces el de ΓA. Pero se ha supuesto que el cuadrado de BA es cinco veces el de ΓA; entonces el cuadrado de BA es igual a los (cuadrados) de BΓ, ΓA; lo cual es imposible [II 4]. Por tanto, ΓB no es el doble de AΓ. De manera semejante demostraríamos que tampoco una recta menor que ΓB es el doble de ΓA; porque es todavía más absurdo.

Por consiguiente, el doble de AΓ es mayor que ΓB. Q. E. D. [71].

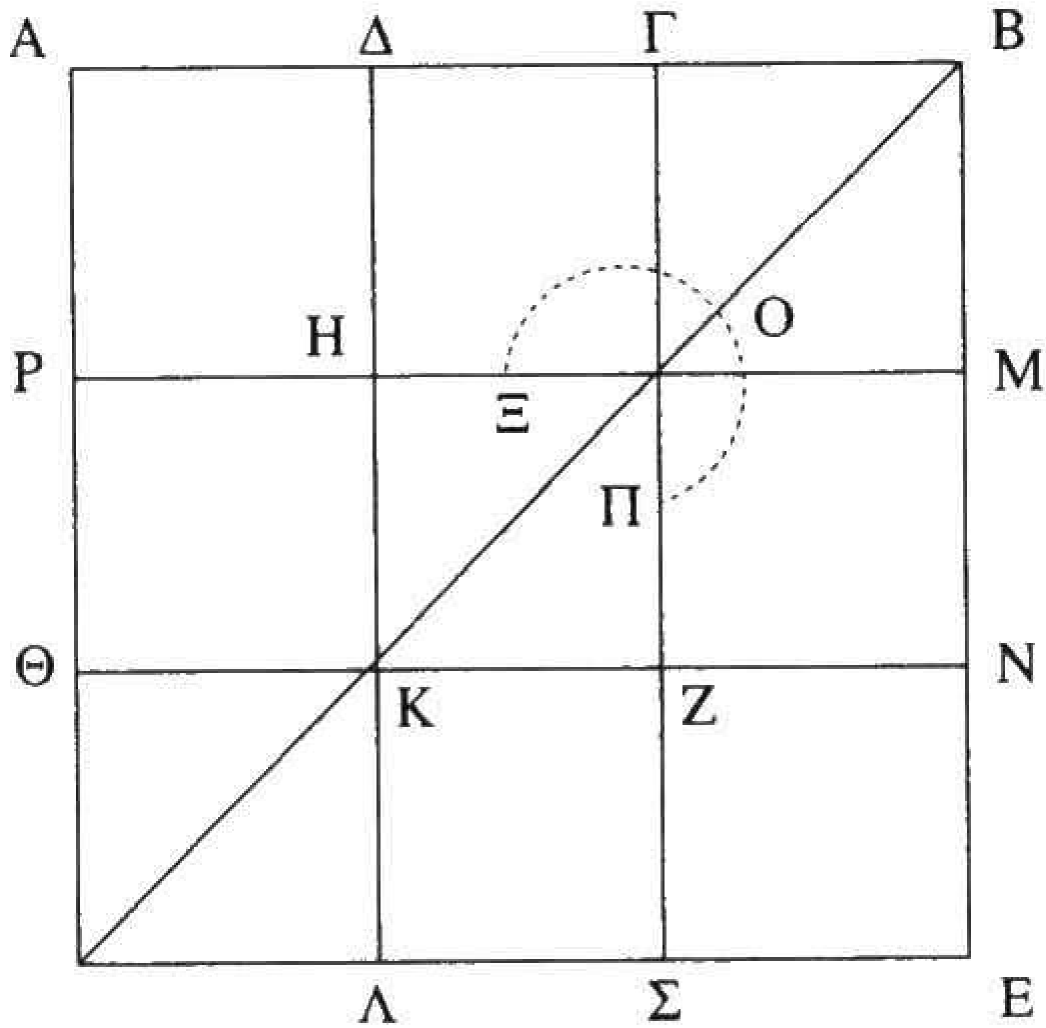
PROPOSICIÓN 3

Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento menor junto con el de la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor.

Córtese, pues, una recta AB en extrema y media razón por el punto Γ, y sea AΓ el segmento mayor, y divídase AΓ en dos partes iguales por el (punto) Δ.

Digo que el cuadrado de BΔ es cinco veces el de ΔΓ.

Pues constrúyase el cuadrado AE de AB, e inscríbase la figura doble. Como AΓ es el doble de ΔΓ, entonces el cuadrado de AΓ es el cuádruple del (cuadrado) de ΔΓ, es decir PΣ (el cuádruple) de ZH. Y como el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AΓ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es ΓE, entonces ΓE es igual a PΣ. Pero PΣ es el cuádruple de ZH; luego ΓE es también el cuádruple de ZH. Puesto que AΔ es, a su vez, igual a ΔΓ, también ΘK es igual a KZ. De modo que el cuadrado HZ es igual al cuadrado ΘΛ. Luego HK es igual a KΛ, es decir MN a NE; de modo que MZ es también igual a ZE. Pero MZ es igual a ΓH; entonces ΓH es igual a ZE. Añádase a ambos ΓN; entonces el gnomon ΞOΠ es igual a ΓE. Pero se ha demostrado que ΓE es el cuádruple de HZ; luego el gnomon ΞOΠ es también el cuádruple del cuadrado ZH. Por tanto el gnomon ΞOΠ y el cuadrado ZH son cinco veces ZH. Pero el gnomon ΞOΠ y el cuadrado ZH son el (cuadrado) ΔN. Y ΔN es el cuadrado de ΔB, mientras que HZ es el cuadrado de ΔΓ. Por tanto, el cuadrado de ΔB es cinco veces el (cuadrado) de ΔΓ. Q. E. D.



PROPOSICIÓN 4

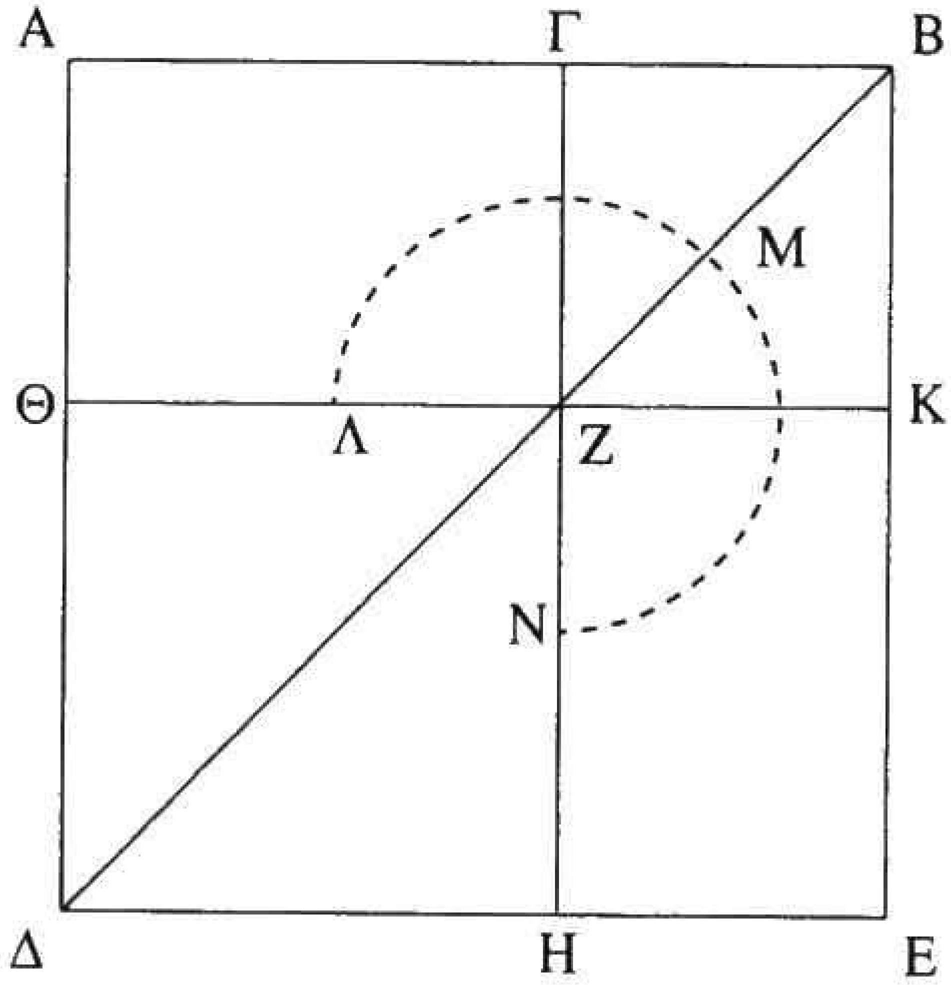
Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado de la recta entera y el del segmento menor juntos son el triple del cuadrado del segmento mayor.

Sea AB la recta y córtese en extrema y media razón por el punto Γ, y sea AΓ el segmento mayor.

Digo que los cuadrados de AB, BΓ son el triple del cuadrado de ΓA.

Constrúyase, pues, el cuadrado AΔEB de AB e inscríbase la figura. Pues bien, como AB se ha cortado en extrema y media razón por Γ, y AΓ es el segmento mayor, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AΓ [VI Def. 3; VI 17]. Y el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es AK, mientras que el (cuadrado) de AΓ es ΘH; entonces AK es igual a ΘH. Y como AZ es igual a ZE, añádase a ambos ΓK; entonces el (área) entera AK es igual al (área) entera ΓE; luego AK, ΓE son el doble de AK. Pero AK, ΓE son el gnomon ΛMN y el cuadrado ΓK; entonces el gnomon ΛMN y el cuadrado ΓK son el doble de AK. Pero además se ha demostrado que AK es igual a ΘH;

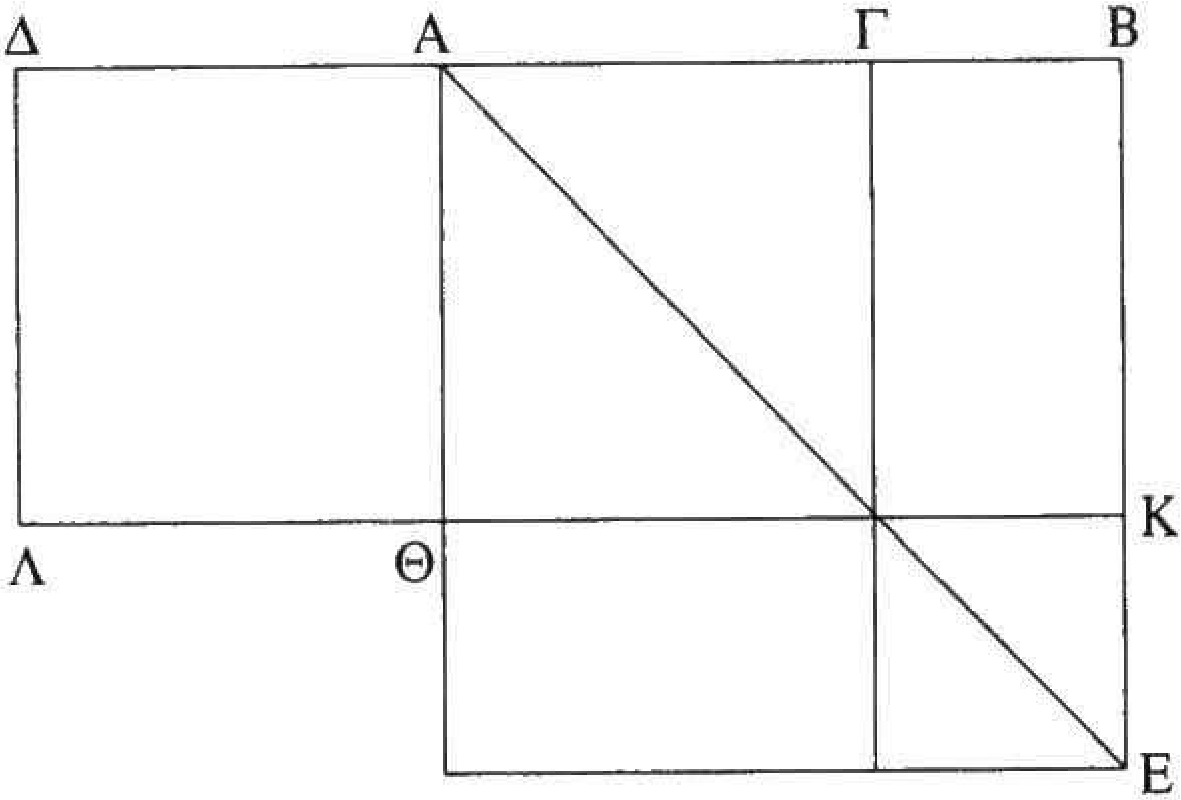
luego el gnomon ΛMN y los cuadrados ΓK, ΘH son el triple del cuadrado ΘH. Ahora bien, el gnomon ΛMN y los cuadrados ΓK, ΘH son el (cuadrado) entero AE y ΓK, que son precisamente los cuadrados de AB, BΓ, mientras que HΘ es el cuadrado de AΓ. Por tanto, los cuadrados de AB, BΓ son el triple del cuadrado de AΓ. Q. E. D.



Proposición 5

Si se corta una línea recta en extrema y media razón y se le añade (otra) igual al segmento mayor, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y la recta inicial es el segmento mayor.

Córtese, pues, la línea recta AB en extrema y media razón por el punto Γ; sea AΓ el segmento mayor y (hágase) AΔ igual a AΓ.



Digo que la recta ΔB se ha cortado en extrema y media razón por el punto A, y que la recta inicial, AB, es el segmento mayor.

Pues constrúyase el cuadrado AE de AB, e inscríbase la figura. Como AB se ha cortado en extrema y media razón por el punto Γ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al (cuadrado) de AΓ [VI Def. 3; VI 17]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es ΓE, mientras que el cuadrado de AΓ es ΓΘ; entonces ΓE es igual a ΘΓ. Pero ΘE es igual a ΓE, y ΔΘ a ΘΓ; entonces, ΔΘ es igual a ΘE. Luego el (área) entera ΔK es igual al (área) entera AE. Y ΔK es el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔA, porque AΔ es igual a ΔΛ; mientras que AE es el (cuadrado) de AB; luego el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔA es igual al (cuadrado) de AB. Entonces, como ΔB es a BA, así BA a AΔ [VI 17]. Pero ΔB es mayor que BA; luego BA es también mayor que AΔ [VI 14].

Por consiguiente, se ha cortado ΔB en extrema y media razón por el (punto) A, y AB es el segmento mayor. Q. E. D.

Proposición 6 [72]

Si una recta expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Sea AB la recta expresable y córtese en extrema y media razón por el punto Γ, y sea AΓ el segmento mayor.

Digo que cada una de las (rectas) AΓ, ΓB es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

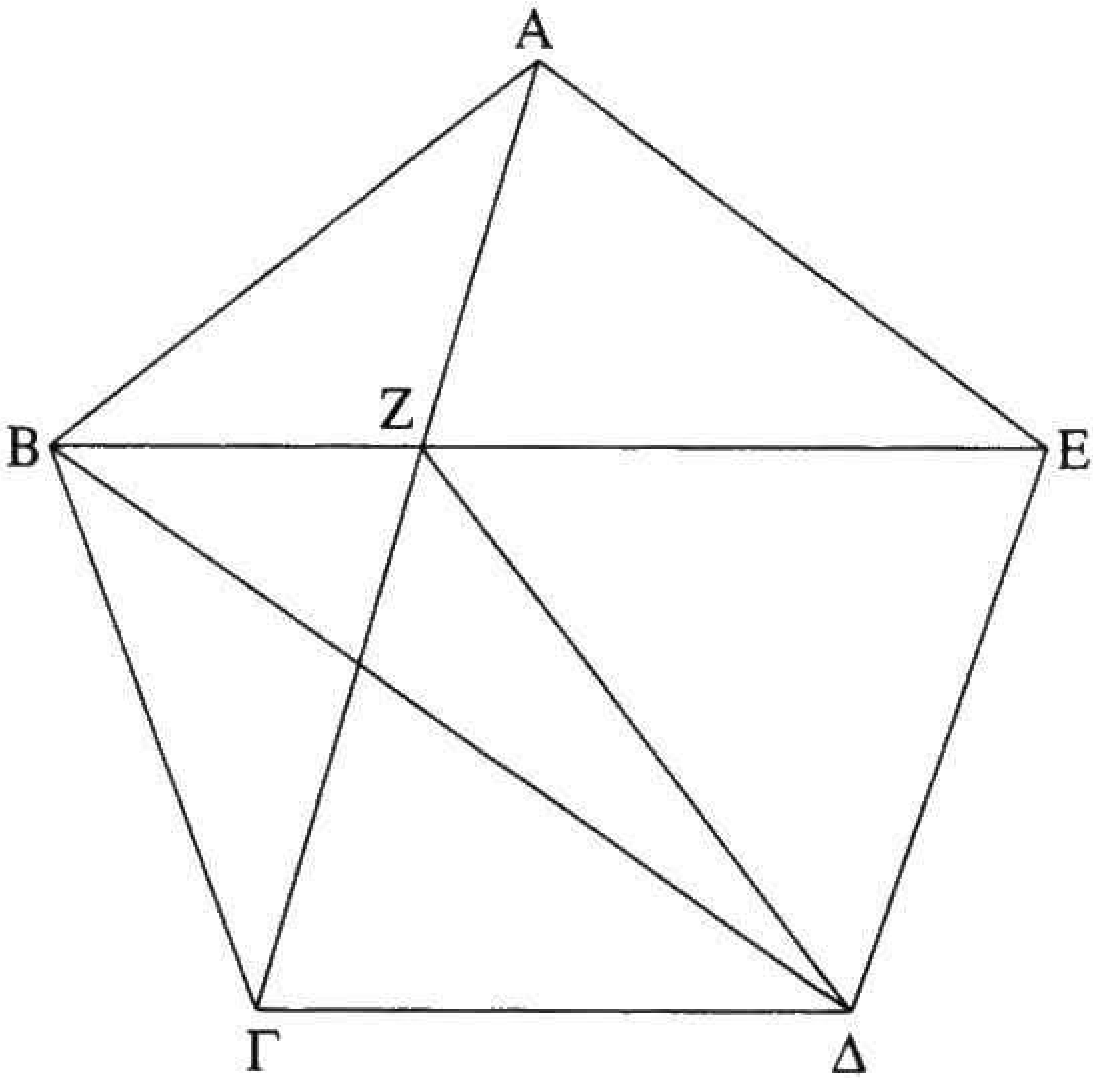
Prolónguese, pues, BA y hágase AΔ (igual) a la mitad de BA. Pues bien, como la recta AB se ha cortado en extrema y media razón por el punto Γ y se ha añadido al segmento mayor AΓ la (recta) AΔ que es la mitad de AB, entonces el cuadrado de ΓΔ es cinco veces el de AΔ [XIII 1]. Luego el (cuadrado) de ΓΔ guarda con el (cuadrado) de ΔA la razón que un número guarda con un número; por tanto el (cuadrado) de ΓΔ es conmensurable con el (cuadrado) de ΔA [X 6]. Pero el (cuadrado) de ΔA es expresable, porque ΔA es expresable, siendo la mitad de AB que es expresable; entonces el cuadrado de ΓΔ es expresable [X Def. 4]. Luego ΓΔ también es expresable. Ahora bien, como el (cuadrado) de ΓΔ no guarda con el cuadrado de ΔA la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces ΓΔ es inconmensurable en longitud con ΔA [X 9]; luego ΓΔ, ΔA son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, AΓ es una apótoma [X 73]. A su vez, como AB se ha cortado en extrema y media razón y su segmento mayor es AΓ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es igual al cuadrado de AΓ [VI Def. 3, VI 17]. Luego el cuadrado de la apótoma AΓ, aplicado a la (recta) expresable AB, produce la anchura BΓ; pero el cuadrado de una apótoma, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una primera apótoma [X 97]; por tanto ΓB es una primera apótoma. Pero se ha demostrado que ΓA es también una apótoma.

Por consiguiente, si una recta expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Proposición 7

Si tres ángulos de un pentágono equilátero, sean sucesivos o no, son iguales, el pentágono será equiangular.

Sean, pues, en primer lugar, iguales entre sí, los tres ángulos sucesivos correspondientes a A, B, Γ, del pentágono equilátero ABΓΔE.



Digo que el pentágono ΑΒΓΔΕ es equiangular.

Pues trácense ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Y como los dos (lados) ΓΒ, ΒΑ son iguales respectivamente a ΒΑ, ΑΕ, y el ángulo ΓΒΑ es igual al ángulo ΒΑΕ, entonces, la base ΑΓ es igual a la base ΒΕ, y el triángulo ΑΒΓ es igual al triángulo ΑΒΕ y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden los lados iguales, serán también iguales respectivamente [I 4], es decir: el (ángulo) ΒΓΑ al (ángulo) ΒΕΑ, y el (ángulo) ΑΒΕ al (ángulo) ΓΑΒ; de modo que el lado ΑΖ es también igual al lado ΒΖ [I 6]. Pero se ha demostrado que la (recta) entera ΑΓ es también igual a la (recta) entera ΒΕ; luego la (parte) restante ΖΓ es igual a la (parte) restante ΖΕ. Pero ΓΔ también es igual a ΔΕ. Entonces los dos (lados) ΖΓ, ΓΔ son iguales a los dos (lados) ΖΕ, ΕΔ; y su base ΖΔ es común; entonces el ángulo ΖΓΔ es igual al (ángulo) ΖΕΔ [I 8]. Pero se ha demostrado que también el (ángulo) ΒΓΑ es igual al (ángulo) ΑΕΒ; entonces el ángulo entero ΒΓΔ es igual al ángulo entero ΑΕΔ. Ahora bien, se ha supuesto que el (ángulo) ΒΓΔ es igual a los ángulos correspondientes a Α, Β; luego el (ángulo) ΑΕΔ es igual a los ángulos correspondientes a Α, Β. De manera semejante demostraríamos que el ángulo ΓΔΕ es también igual a los ángulos correspondientes a Α, Β, Γ. Por tanto, el pentágono ΑΒΓΔΕ es equiangular.

Pero ahora no sean iguales los ángulos sucesivos, sino que sean iguales los correspondientes a los puntos Α, Γ, Δ.

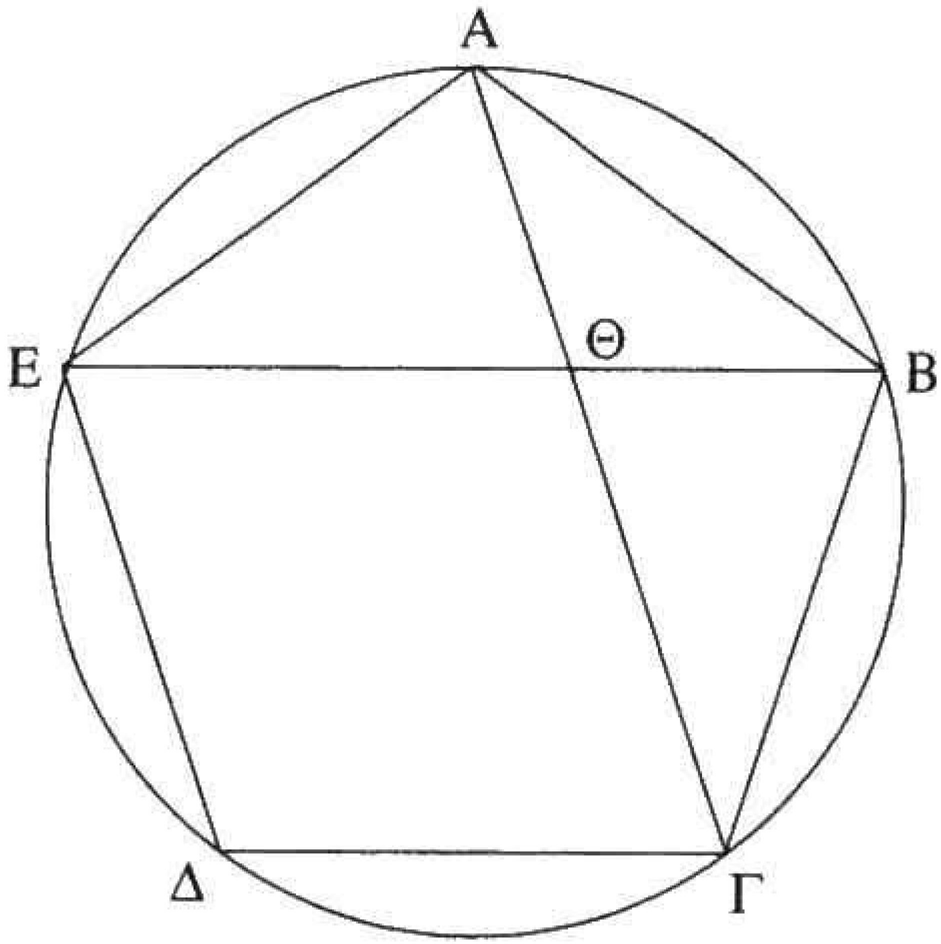
Digo que también en este caso el pentágono ΑΒΓΔΕ es equiangular.

Trácese, pues, ΒΔ. Y como los dos (lados) ΒΑ, ΑΕ son iguales a los dos (lados) ΒΓ, ΓΔ y comprenden ángulos iguales, entonces la base ΒΕ es igual a la base ΒΔ, y el triángulo ΑΒΕ es igual al triángulo ΒΓΔ, y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden ángulos iguales, serán también iguales respectivamente [I 4]. Luego el ángulo ΑΕΒ es igual al ángulo ΓΔΒ. Pero el ángulo ΒΕΔ es también igual al ángulo ΒΔΕ, porque el lado ΒΕ es también igual al lado ΒΔ [I 5]. Entonces, el ángulo entero ΑΕΔ es igual al ángulo entero ΓΔΕ. Pero se ha supuesto que el ángulo ΓΔΕ es igual a los ángulos Α, Γ; luego el ángulo ΑΕΔ es igual a los correspondientes a Α, Γ. Por lo mismo el ángulo ΑΒΓ es también igual a los ángulos correspondientes a Α, Γ, Δ. Por consiguiente, el pentágono ΑΒΓΔΕ es equiangular. Q. E. D.

Proposición 8

Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subtienden dos ángulos sucesivos, se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

Subtiendan las rectas ΑΓ, ΒΕ que se cortan en el punto Θ a los dos ángulos sucesivos correspondientes a Α, Β del pentágono equilátero y equiangular ΑΒΓΔΕ.



Digo que cada una de ellas queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y que sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

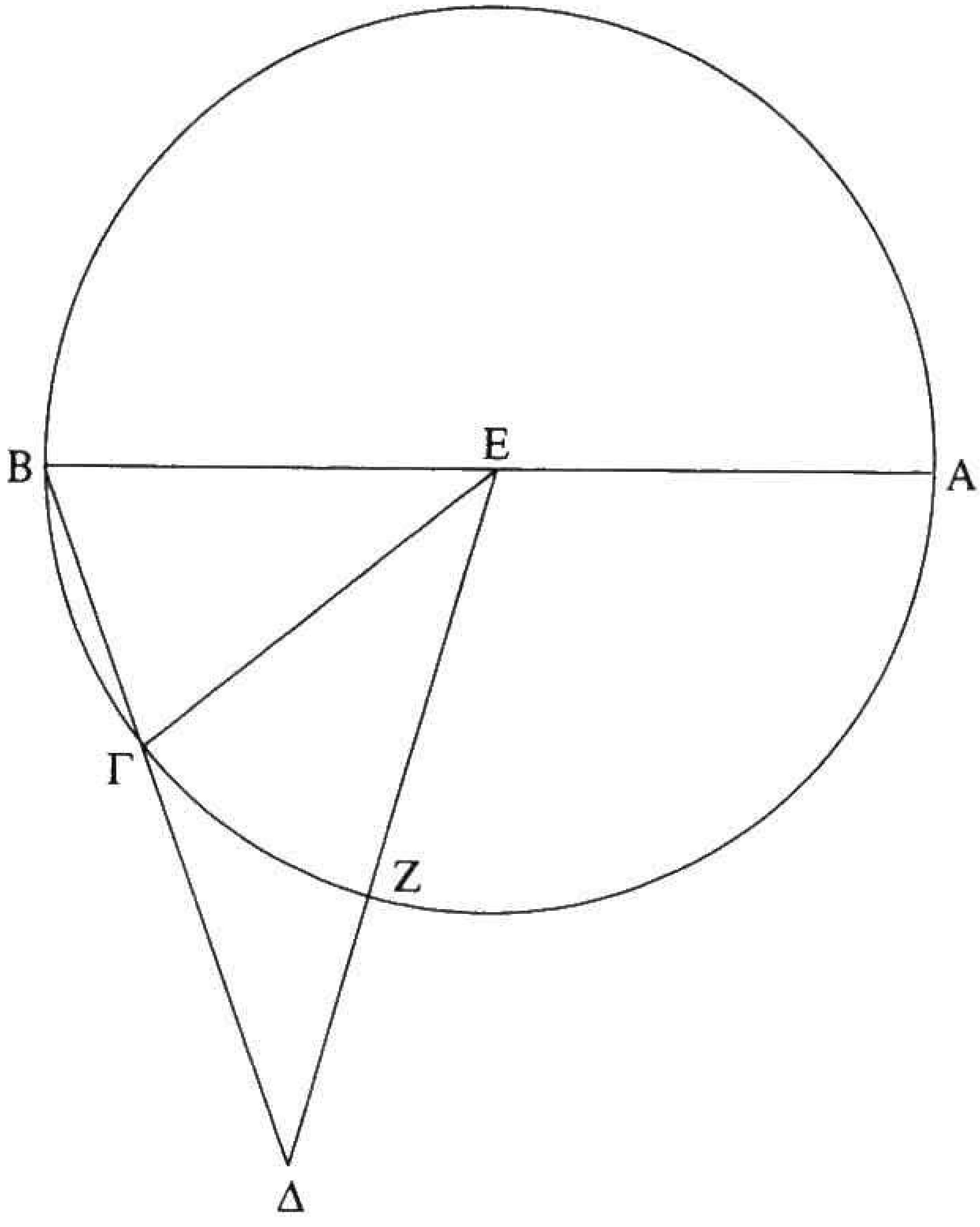
Circunscríbase, pues, en torno al pentágono ΑΒΓΔΕ, el círculo ΑΒΓΔΕ. Y como las dos rectas ΕΑ, ΑΒ son iguales a las dos (rectas) ΑΒ, ΒΓ y comprenden ángulos iguales, entonces, la base ΒΕ es igual a la base ΑΓ, y el triángulo ΑΒΕ es igual al triángulo ΑΒΓ y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden los lados iguales, serán también iguales respectivamente [I 4]. Entonces el ángulo ΒΑΓ es igual al ángulo ΑΒΕ; luego el (ángulo) ΑΘΕ es el doble del (ángulo) ΒΑΓ, porque la circunferencia ΕΔΓ es también el doble de la (circunferencia) ΓΒ [III 28, VI 33]; entonces el ángulo ΘΑΕ es igual al (ángulo) ΑΘΕ; de modo que también la recta ΘΕ es igual a la (recta) ΕΑ, es decir, es igual a la recta ΑΒ [I 6]. Y como la recta ΒΑ es igual a la (recta) ΑΕ, también el ángulo ΑΒΕ es igual al (ángulo) ΑΕΒ [I 5]. Pero se ha demostrado que el ángulo ΑΒΕ es igual al ángulo ΒΑΘ; luego el (ángulo) ΒΕΑ también es igual al (ángulo) ΒΑΘ. Y el ángulo ΑΒΕ es común a los dos triángulos ΑΒΕ y ΑΒΘ; entonces el ángulo restante ΒΑΕ es igual al (ángulo) restante ΑΘΒ [I 32]; luego el triángulo ΑΒΕ tiene sus ángulos iguales a los del (triángulo) ΑΒΘ; por tanto, proporcionalmente, como ΕΒ es a ΒΑ, así ΑΒ a ΒΘ [VI 4]. Pero ΒΑ es igual a ΕΘ; entonces, como ΒΕ es a ΕΘ, así ΕΘ a ΘΒ. Pero ΒΕ es mayor que ΕΘ; luego ΕΘ es mayor que ΘΒ [V 14]. Por tanto, ΒΕ queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y su segmento mayor ΘΕ es igual al lado del pentágono. De manera semejante demostraríamos que AΓ también queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y que su segmento mayor ΓΘ; es igual al lado del pentágono. Q. E. D.

Proposición 9

Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono.

Sea ABΓ el círculo y, de las figuras inscritas en el círculo ABΓ, sea BΓ el lado del decágono y ΓΔ el del hexágono, y estén en línea recta.

Digo que la recta entera BΔ queda cortada en extrema y media razón y que su segmento mayor es el lado del hexágono.



Tómese, pues, el punto E como centro del círculo, y trácense EB, EΓ, EΔ, y prolónguese BE hasta A. Como BΓ es el lado del decágono equilátero, entonces la circunferencia AΓB es cinco veces la circunferencia BΓ; luego la circunferencia AΓ es el cuádruple de ΓB. Pero, como la circunferncia AΓ es a la circunferencia ΓB, así el ángulo AEΓ al (ángulo) ΓEB [VI 33]; entonces el (ángulo) AEΓ es el cuádruple del ángulo ΓEB.

Y como el ángulo ΕΒΓ es igual al (ángulo) ΕΓΒ [I 5], entonces el ángulo ΑΕΓ es el doble del (ángulo) ΕΓΒ [I 32]. Y como la recta ΕΓ es igual a la (recta) ΓΔ, porque cada una de ellas es igual al lado del hexágono inscrito en el círculo ΑΒΓ [IV 15 Por.], el ángulo ΓΕΔ es también igual al ángulo ΓΔΕ [I 5]; entonces el ángulo ΕΓΒ es el doble del (ángulo) ΕΔΓ [I 32]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) ΕΓΒ es el doble del (ángulo) ΑΕΓ; luego el (ángulo) ΑΕΓ es el cuádruple del (ángulo) ΕΔΓ. Pero se ha demostrado que el ángulo ΑΕΓ es el cuádruple del ángulo ΒΕΓ; luego el (ángulo) ΕΔΓ es igual al (ángulo) ΒΕΓ. Ahora bien, el ángulo ΕΒΔ es común a los dos triángulos ΒΕΓ y ΒΕΔ; entonces el (ángulo) restante ΒΕΔ es igual al ángulo restante ΕΓΒ [I 32]; luego el triángulo ΕΒΔ es de ángulos iguales a los del triángulo ΕΒΓ. Por tanto, proporcionalmente, como ΔΒ es a ΒΕ, así ΕΒ a ΒΓ [VI 4]. Pero ΕΒ es igual a ΓΔ. Luego, como ΒΔ es a ΔΓ, así ΔΓ a ΓΒ. Pero ΒΔ es mayor que ΔΓ; entonces ΔΓ también es mayor que ΓΒ. Por tanto, ΒΔ queda dividida en extrema y media razón y su segmento mayor es ΔΓ. Q. E. D.

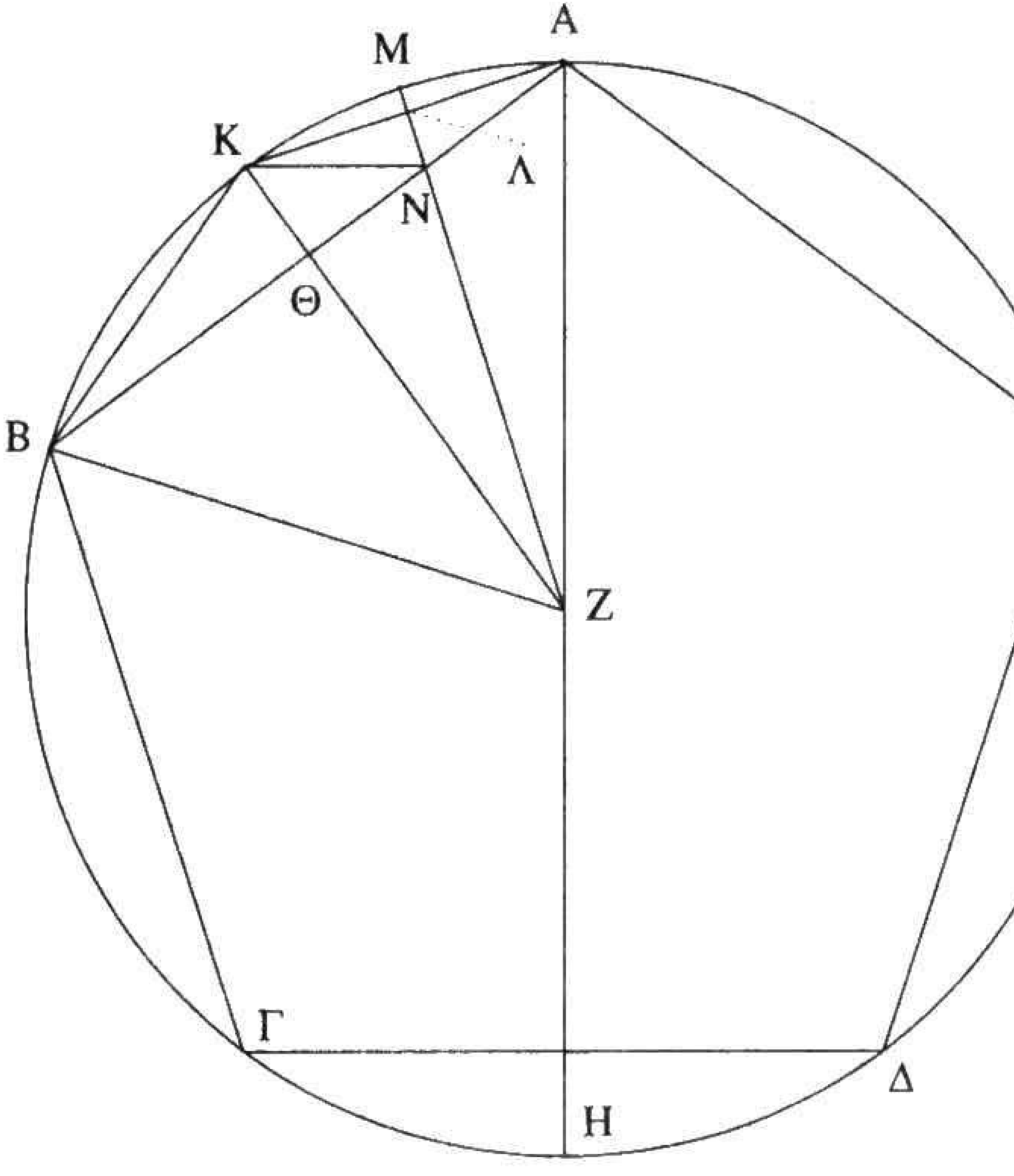
Proposición 10

Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual a los (cuadrados) de los (lados) del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo.

Sea ΑΒΓΔΕ el círculo, e inscríbase en el círculo ΑΒΓΔΕ el pentágono equilátero ΑΒΓΔΕ.

Digo que el cuadrado del lado del pentágono ΑΒΓΔΕ es igual a los de los lados del hexágono y el decágono inscritos en el círculo ΑΒΓΔΕ.

Pues tómese el punto Ζ como centro del círculo y, una vez trazada ΑΖ, prolónguese hasta el punto Η; trácese ΖΒ y trácese, desde Ζ, ΖΘ perpendicular a ΑΒ, y prolónguese hasta el (punto) Κ y trácense ΑΚ, ΚΒ; trácese a su vez ΖΛ perpendicular a ΑΚ y prolónguese hasta Μ, y trácese ΚΝ. Como la circunferencia ΑΒΓΗ es igual a la circunferencia ΑΕΔΗ y, en ellas, ΑΒΓ es igual a ΑΕΔ, entonces el resto, la circunferencia ΓΗ, es igual al resto, la circunferencia ΗΔ. Y ΓΔ es el (lado) del pentágono; entonces ΓΗ es el (lado) del decágono. Y como ΖΑ es igual a ΖΒ y ΖΘ es perpendicular, entonces el ángulo ΑΖΚ es también igual al (ángulo) ΚΖΒ [I V, I 26]. De modo que la circunferencia ΑΚ es igual a ΚΒ [III 26], luego la circunferencia ΑΒ es el doble de la circunferencia ΒΚ; por tanto la recta ΑΚ es un lado del decágono. Por lo mismo ΑΚ también es el doble de ΚΜ. Ahora bien, como la circunferencia ΑΒ es el doble de la circunferencia ΒΚ, mientras que la circunferencia ΓΔ es igual a la circunferencia ΑΒ, entonces la circunferencia ΓΔ es el doble de la circunferencia ΒΚ. Pero la circunferencia ΓΔ es el doble de la circunferencia ΓΗ; luego la circunferencia ΓΗ es igual a la circunferencia ΒΚ. Pero ΒΚ es el doble de ΚΜ, porque también lo es ΚΑ; entonces ΓΗ es el doble de ΚΜ. Pero además la circunferencia ΓΒ es el doble de la circunferencia ΒΚ, porque la circunferencia ΓΒ es igual a ΒΑ. Por tanto, la circunferencia entera ΗΒ es el doble de ΒΜ; de modo que también el ángulo ΗΖΒ es el doble del ángulo ΒΖΜ [VI 33]. Pero el (ángulo) ΗΖΒ es también el doble del (ángulo) ΖΑΒ, porque el (ángulo) ΖΑΒ es igual al (ángulo) ABZ. Luego el ángulo BZN es también igual al ángulo ZAB. Pero el ángulo ABZ es común a los dos triángulos ABZ, BZN; entonces el (ángulo) restante AZB es igual al (ángulo) restante BNZ [I 32]. Luego el triángulo ABZ es de ángulos iguales a los del triángulo BZN. Por tanto, proporcionalmente, como la recta AB es a la (recta) BZ, así ZB a BN [VI 4]; así pues, el (rectángulo) AB, BN es igual al cuadrado de BZ [VI 17]; como a su vez AΛ es igual a ΛK y ΛN es común y forma ángulos rectos, entonces la base KN es igual a la base AN [I 4]; luego el ángulo ΛKN es igual al ángulo ΛAN. Pero el (ángulo) ΛAN es igual al (ángulo) KBN; entonces el (ángulo) ΛKN es igual al ángulo KBN. Y el (ángulo) correspondiente a A es común a los dos triángulos, AKB y AKN. Entonces el (ángulo) restante AKB es igual al ángulo restante KNA [I 32]; luego el triángulo KBA es de ángulos iguales a los del triángulo KNA. Por tanto, proporcionalmente, como la recta BA es a AK, así KA a AN [VI 4]; luego el (rectángulo) BA, AN es igual al cuadrado de AK [VI 17]. Pero se ha demostrado que también el (rectángulo) AB, BN es igual al (cuadrado) de BZ; entonces el (rectángulo) AB, BN junto con el (rectángulo) BA, AN, que es el (cuadrado) de BA, es igual al (cuadrado) de BZ junto con el (cuadrado) de AK. Ahora bien, BA es el lado del pentágono, BZ del hexágono y AK del decágono.



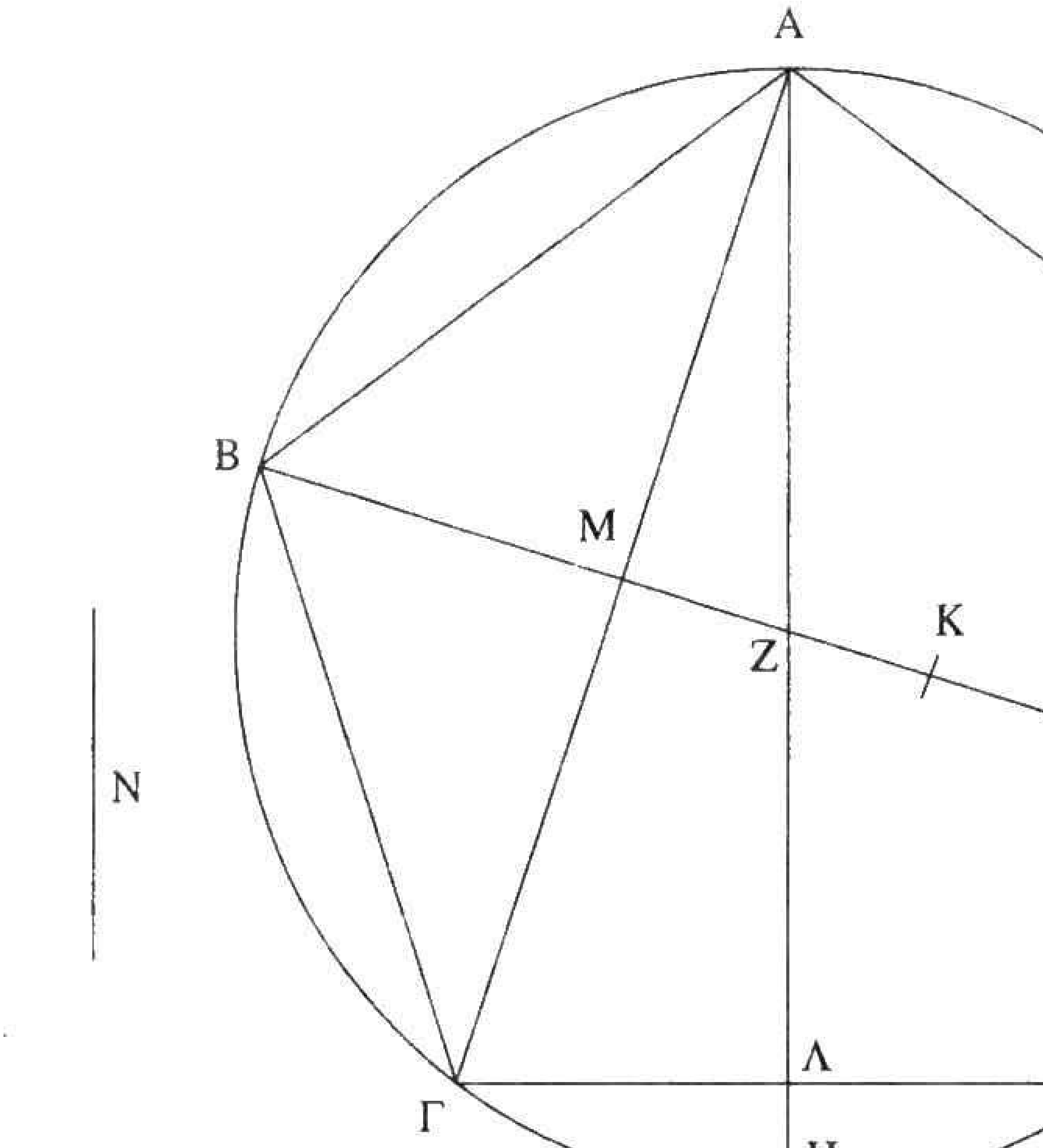
Por consiguiente, el cuadrado del lado del pentágono regular es igual al del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo. Q. E. D.

Proposición 11

Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo que tenga diámetro expresable, el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor.

Inscríbase, pues el pentágono equilátero ΑΒΓΔΕ en el círculo ΑΒΓΔΕ que tiene el diámetro expresable.

Digo que el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor.



Pues tómese el punto Z como centro del círculo y trácense AZ, ZB y prolónguense hasta los puntos H, Θ y trácese AΓ y hágase ZK igual a la cuarta parte de AZ. Pero AZ es expresable, entonces ZK es también expresable. Pero BZ también es expresable; entonces la (recta) entera BK es expresable. Y como la circunferencia AΓH es igual a la circunferencia AΔH y en ellas ABΓ es igual a AEΔ, entonces, el resto ΓH es igual al resto HΔ. Luego, si trazamos AΔ, se concluye que los ángulos correspondientes a Λ son rectos y que ΓΔ es el doble de ΓΛ. Por lo mismo los (ángulos) correspondientes a M son rectos y AΓ es el doble de ΓM. Pues bien, como el ángulo AΛΓ es igual al (ángulo) AMZ y el (ángulo) ΛAΓ es común a los dos triángulos AΓΛ y AMZ, entonces el (ángulo) restante AΓΛ es igual al (ángulo) restante MZA [I 32]. Luego el triángulo AΓΛ es de ángulos iguales a los del triángulo AMZ; por tanto, proporcionalmente, como ΛΓ es a ΓA, así MZ a ZA; y (tomando) los dobles de los antecedentes, como el doble de ΛΓ es a ΓA, así el doble de MZ a ZA. Pero como el doble de MZ es a ZA, así MZ a la mitad de ZA; entonces también, como el doble de ΛΓ es a ΓA, así MZ a la mitad de ZA. Y (tomando) la mitad de los consecuentes, como el doble de ΛΓ es a la mitad de ΓA, así MZ a la cuarta parte de ZA. Ahora bien, el doble de ΛΓ es ΔΓ; la mitad de ΓA, ΓM; y la cuarta parte de ZA, ZK; entonces, como ΔΓ es a ΓM, así MZ a ZK. Y, por composición, como la suma de ΔΓ, ΓM es a ΓM, así MK a KZ [V 18]; luego, como el cuadrado de la suma de ΔΓ, ΓM es al cuadrado de ΓM, así el cuadrado de MK al cuadrado de KZ. Y puesto que, si se corta en extrema y media razón la recta que subtiende dos lados del pentágono, como AΓ, el segmento mayor es igual al lado del pentágono, es decir, ΔΓ [XIII 8], mientras que el cuadrado del segmento mayor añadido a la mitad de la (recta) entera es cinco veces la mitad del cuadrado de la (recta) entera [XIII 1], y ΓM es la mitad de la recta entera AΓ, entonces, el cuadrado de ΔΓM, (tomada) como una (recta) es cinco veces el cuadrado de ΓM. Pero se ha demostrado que, como el cuadrado de ΔΓM, tomada como una recta, es al cuadrado de ΓM, así el cuadrado de MK al de KZ. Entonces, el cuadrado de MK es cinco veces el cuadrado de KZ. Pero el cuadrado de KZ es expresable, porque el diámetro es expresable; luego el cuadrado de MK es expresable. Por tanto, MK es expresable. Y como BZ es el cuádruple de ZK, entonces BK es cinco veces KZ; luego el cuadrado de BK es veinticinco veces el cuadrado de KZ. Pero el cuadrado de MK es cinco veces el cuadrado de KZ. Entonces, el cuadrado de BK es cinco veces el cuadrado de KM; luego el cuadrado de BK no guarda con el cuadrado de KM la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; por tanto BK es inconmensurable en longitud con KM [X 9]. Y cada una de ellas es expresable; así pues, BK, KM son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Pero si se quita de una recta expresable otra recta expresable conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera, la (recta) restante, sin razón expresable, es una apótoma; por tanto MB es una apótoma y MK la adjunta a ella [X 73].

Digo ahora que además MB es la cuarta (apótoma). Sea el cuadrado de N igual a aquello en lo que el (cuadrado) de BK es mayor que el (cuadrado) de KM; entonces el cuadrado de BK es mayor que el cuadrado de KM en el cuadrado de N. Ahora bien, como KZ es conmensurable con ZB, también, por composición, KB es conmensurable con ZB [X 15]. Pero BZ es conmensurable con BΘ; luego BK también es conmensurable con BΘ [X 12]. Y como el cuadrado de BK es cinco veces el cuadrado de KM, entonces el cuadrado de BK guarda con el cuadrado de KM la razón que 5 guarda con 1[73]. Entonces, por conversión, el cuadrado de BK guarda con el cuadrado de N la razón que 5 guarda con 4 [V 19 Por.], no la que un (número) cuadrado guarda con un (número) cuadrado; entonces BK es inconmensurable con N [X 9]; luego el cuadrado de BK es mayor que el cuadrado de KM en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (BK); y puesto que el cuadrado de la (recta) entera BK es mayor que el cuadrado de la adjunta, KM, en el cuadrado de (una recta) inconmensurable con ella (BK), y la recta entera, BK, es conmensurable con la recta expresable propuesta, BΘ, entonces MB es una cuarta apótoma [X Ter. Def. 4]. Pero el rectángulo comprendido por una recta expresable y una cuarta apótoma no tiene razón expresable y el lado del cuadrado no tiene razón expresable y se llama «menor» [X 94]. Pero el cuadrado de AB es igual al rectángulo ΘB, BM, porque, si se traza AΘ, el triángulo ABΘ es de ángulos iguales a los del (triángulo) ABM y como ΘB es a BA, así AB a BM.

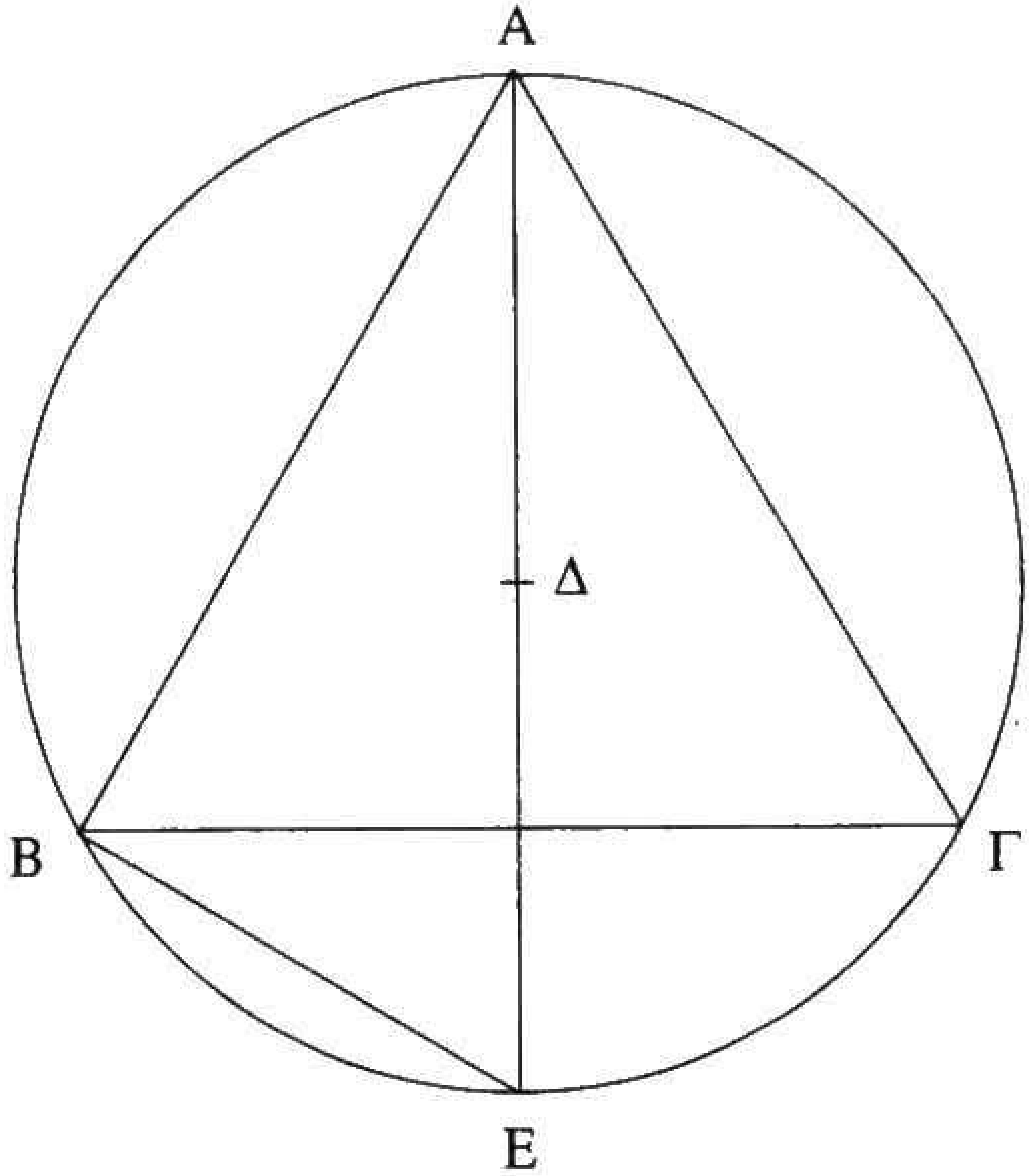
Por consiguiente, el lado AB del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor. Q. E. D.

Proposición 12

Si se inscribe un triángulo equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del (cuadrado) del radio del círculo.

Sea ABΓ el círculo e inscríbase en él el triángulo equilátero ABΓ.

Digo que el cuadrado de un lado del triángulo ABΓ es el triple del (cuadrado) del radio del círculo ABΓ.



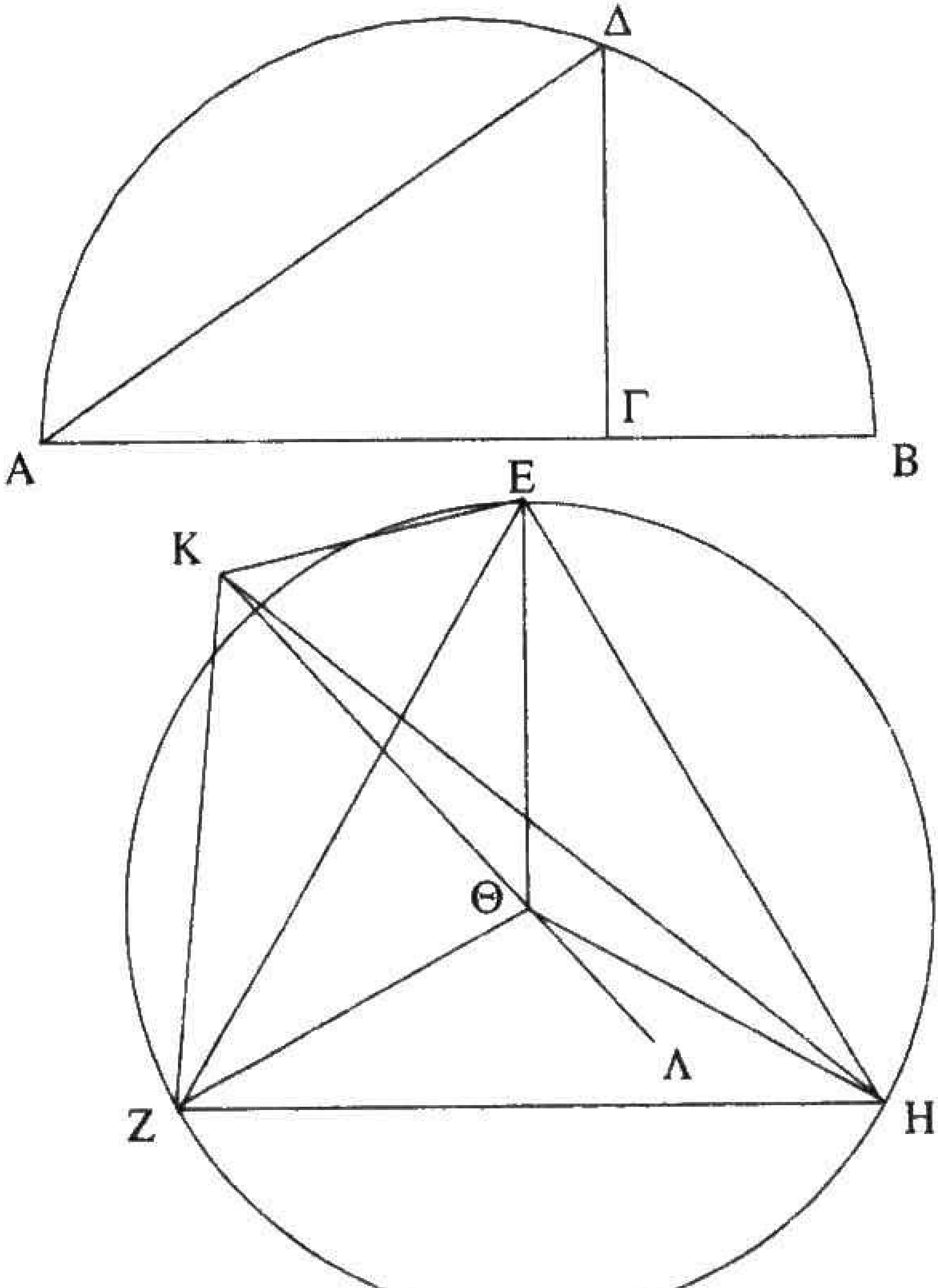
Tómese, pues, Δ como centro del círculo ABΓ, y, una vez trazada AΔ prolónguese hasta E y trácese BE. Ahora bien, como ABΓ es un triángulo equilátero, entonces la circunferencia BEΓ es la tercera parte de la circunferencia del círculo ABΓ. Luego la circunferencia BE es la sexta parte de la circunferencia del círculo. Por tanto, la recta BE es (el lado) de un hexágono; así pues, es igual al radio ΔE [VI 15 Por.]. Y como AE es el doble de ΔE, el cuadrado de AE es el cuádruple del de EΔ, es decir del de BE. Pero el cuadrado de AE es igual a los cuadrados de AB, BE [III 31, I 47] entonces los cuadrados de AB, BE son el cuádruple del (cuadrado) de BE. Luego, por separación, el (cuadrado) de AB es el triple del de BE. Pero BE es igual a ΔE; por tanto, el cuadrado de AB es el triple del de ΔE.

Por consiguiente, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del (cuadrado) del radio [del círculo]. Q. E. D.

Proposición 13

Construir una pirámide, envolverla[74] *en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.*

Póngase AB como diámetro de la esfera dada y córtese por el punto Γ, de modo que AΓ sea el doble de ΓB; descríbase sobre AB el semicírculo AΔB; trácese ΓΔ formando ángulos rectos con AB desde el punto Γ, y trácese ΔA; póngase el círculo EZH que tenga el radio igual a ΔΓ e inscríbase en el círculo EZH el triángulo equilátero EZH [IV 2]; tómese el punto Θ como centro del círculo [III 1]; trácense EΘ, ΘZ, ΘH; desde el punto Θ levántese ΘK formando ángulos rectos con el plano del círculo EZH [XI 12] y quítese de ΘK la (recta) ΘK igual a AΓ, y trácense KE, KZ, KH; ahora bien, como KΘ forma ángulos rectos con el plano del círculo EZH, formará también ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano del círculo EZH [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas ΘE, ΘZ, ΘH la toca; entonces ΘK forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΘE, ΘZ, ΘH. Y como AΓ es igual a ΘK y ΓΔ a ΘE, y comprenden ángulos rectos, entonces la base ΔA es igual a la base KE [I 4]. Por lo mismo cada una de las rectas KZ, KH es también igual a ΔA; luego las tres (rectas) KE, KZ, KH son iguales entre sí. Y como AΓ es el doble de ΓB, entonces AB es el triple de BΓ. Pero como AB es a BΓ, así el cuadrado de AΔ al cuadrado de ΔΓ como se demostrará enseguida[75]. Entonces el cuadrado de AΔ es el triple del cuadrado de ΔΓ. Pero el cuadrado de ZE es también el triple del cuadrado de EΘ [XIII 12], y ΔΓ es igual a EΘ; entonces ΔA es igual a EZ. Ahora bien, se ha demostrado que ΔA es igual a cada una de las (rectas) KE, KZ, KH; entonces las (rectas) EZ, ZH, HE son iguales a las (rectas) KE, KZ, KH respectivamente; luego los cuatro triángulos EZH, KEZ, KZH, KEH son equiláteros. Por tanto, a partir de cuatro triángulos equiláteros, se ha construido una pirámide cuya base es el triángulo EZH y su vértice el punto K.



Ahora hay que envolverla en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Prolónguese, pues, la recta ΘΛ en línea recta con ΚΘ, y hágase ΘΛ igual a ΓΒ. Y dado que, como ΑΓ es a ΓΔ, así ΓΔ a ΓΒ [VI 8 Por.] mientras que ΑΓ es igual a ΚΘ, ΓΔ a ΘΕ y ΓΒ a ΘΛ, entonces como ΚΘ es a ΘΕ, así ΕΘ a ΘΛ; luego el (rectángulo comprendido) por ΚΘ, ΘΛ es igual al cuadrado de ΕΘ [VI 17]. Y cada uno de los ángulos ΚΘΕ, ΕΘΛ es recto; entonces el semicírculo descrito sobre ΚΛ pasará también por el (punto) Ε [VI 8; III 31]. Entonces, si permaneciendo fija ΚΛ, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la posición de donde empezó a moverse, pasará también por los puntos Ζ, Η, pues trazadas las rectas ΖΛ, ΛΗ, los ángulos correspondientes a Ζ, Η resultan parejamente rectos; y la pirámide quedará envuelta en la esfera dada. Porque ΚΛ, el diámetro de la esfera, es igual al diámetro ΑΒ de la esfera dada, ya que ΚΘ se ha hecho igual a ΑΓ y ΘΛ a ΓΒ.

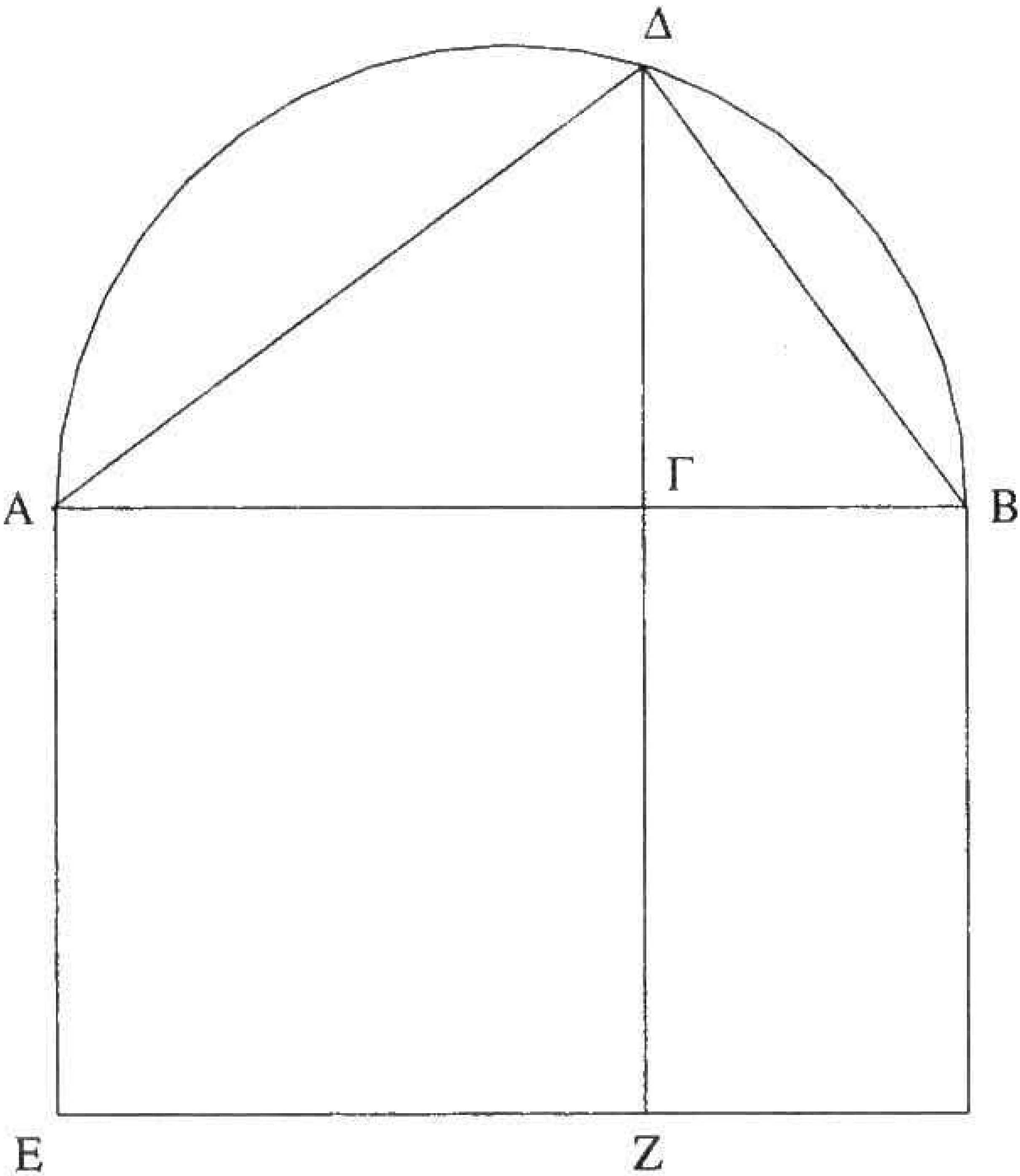
Digo además que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Pues como ΑΓ es el doble de ΓΒ, entonces ΑΒ es el triple de ΒΓ; luego, por conversión, ΒΑ es una vez y media ΑΓ. Pero como ΒΑ es a ΑΓ, así el cuadrado de ΒΑ al de ΑΔ. Luego el cuadrado de ΒΑ es una vez y media el de ΑΔ. Y ΒΑ es el diámetro de la esfera dada y ΑΔ es igual al lado de la pirámide.

Por consiguiente, el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar que, como ΑΒ es a ΒΓ, así el cuadrado de ΑΔ al cuadrado de ΓΔ.

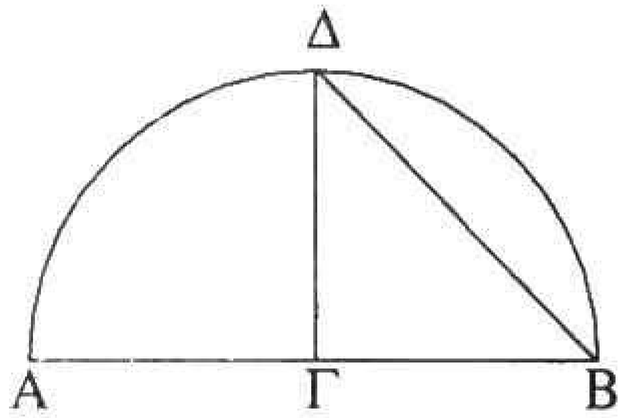


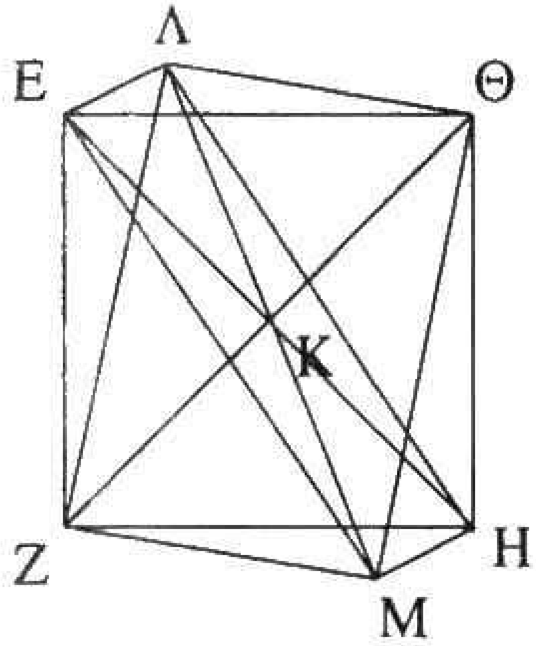
Póngase, pues, la figura del semicírculo, y trácese ΔB; constrúyase sobre AΓ el cuadrado EΓ y complétese el paralelogramo ZB. Pues bien, dado que, por ser el triángulo ΔAB de ángulos iguales a los de ΔAΓ, como BA es a AΔ, así ΔA a AΓ [VI 8; VI 4], entonces el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ es igual al (cuadrado) de AΔ [VI 17]. Y dado que, como AB es a BΓ, así EB a BZ [VI 1] y EB es el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ —porque EA es igual a AΓ— mientras que BZ es el rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB, entonces, como AB es a BΓ, así el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ es igual al cuadrado de AΔ, mientras que el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es igual al (cuadrado) de ΔΓ, porque la perpendicular ΔΓ es la media proporcional de los segmentos AΓ, ΓB de la base por ser recto el ángulo AΔB [VI 8 Por.]. Entonces, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AΔ al cuadrado de ΔΓ. Q. E. D.

Proposición 14

Construir un octaedro y envolverlo en una esfera como en la (proposición) anterior, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro.

Póngase el diámetro AB de la esfera dada y divídase en dos por el punto Γ; descríbase sobre AB el semicírculo AΔB, y trácese, desde el punto Γ, ΓΔ formando ángulos rectos con AB; trácese ΔB; póngase el cuadrado EZHΘ que tenga cada uno de sus lados igual a ΔB, y trácense ΘZ, EH; levántese, a partir del punto K, la recta KΛ formando ángulos rectos con el plano del cuadrado EZHΘ [XI 12] y prolónguese hacia el otro lado del plano como KM, y de las (rectas) KΛ, KM quítense respectivamente KΛ, KM iguales a una de las (rectas) EK, ZK, HK, ΘK y trácense ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH, MΘ. Como KE es igual a KΘ y el ángulo EKΘ es recto, entonces el (cuadrado) de ΘE es el doble del cuadrado de EK [I 47]. Como, a su vez, ΛK es igual a KE y el ángulo ΛKE es recto, entonces el cuadrado de EΛ es el doble del cuadrado de EK [id]. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de ΘE es el doble del cuadrado de EK; entonces el cuadrado de ΛE es igual al cuadrado de EΘ; luego ΛE es igual a EΘ. Por lo mismo, ΛΘ es también igual a ΘE; por tanto, el triángulo ΛEΘ es equilátero. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son los lados del cuadrado EZHΘ y sus vértices los puntos Λ, M, son equiláteros; por tanto, se ha construido un octaedro comprendido por ocho triángulos equiláteros.





Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro.

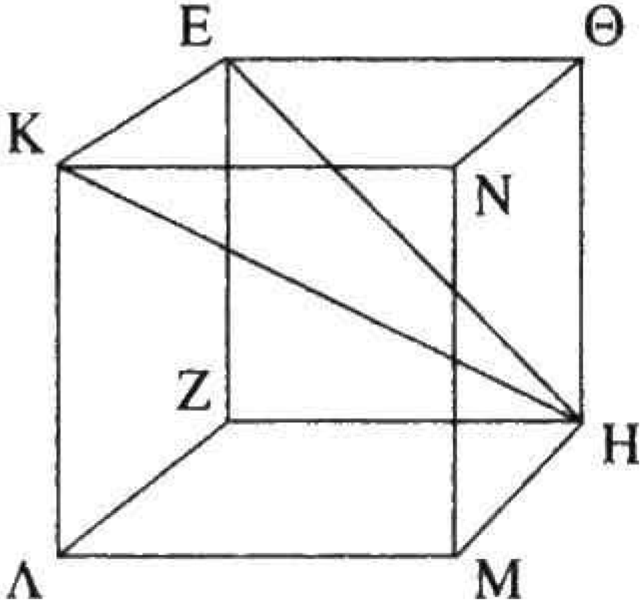
Pues como las tres (rectas) ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ son iguales entre sí, entonces el semicírculo descrito sobre ΛΜ pasará también por el punto Ε. Y por lo mismo, si, permaneciendo fija ΛΜ, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la misma posición desde donde empezó a moverse, pasará también por los puntos Ζ, Η, Θ, y el octaedro quedará envuelto en una esfera. Digo además que también en la esfera dada. Pues como ΛΚ es igual a ΚΜ y ΚΕ es común y comprenden ángulos rectos, entonces, la base ΛΕ es igual a la base ΕΜ [I 4]. Y como el ángulo ΛΕΜ es recto, porque está en un semicírculo [III 31], entonces el cuadrado de ΛΜ es el doble del cuadrado de ΛΕ [I 47]. Como, a su vez, ΑΓ es igual a ΓΒ, ΑΒ es el doble de ΒΓ. Pero como ΑΒ es a ΒΓ, así el cuadrado de ΑΒ al cuadrado de ΒΔ; entonces el cuadrado de ΑΒ es el doble del cuadrado de ΒΔ. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de ΛΜ es el doble del de ΛΕ. Y el cuadrado de ΔΒ es igual al cuadrado de ΛΕ, porque ΕΘ se ha hecho igual a ΔΒ. Entonces el cuadrado de AB es igual al cuadrado de ΛM; luego AB es igual a ΛM. Y AB es el diámetro de la esfera dada; por tanto ΛM es igual al diámetro de la esfera dada.

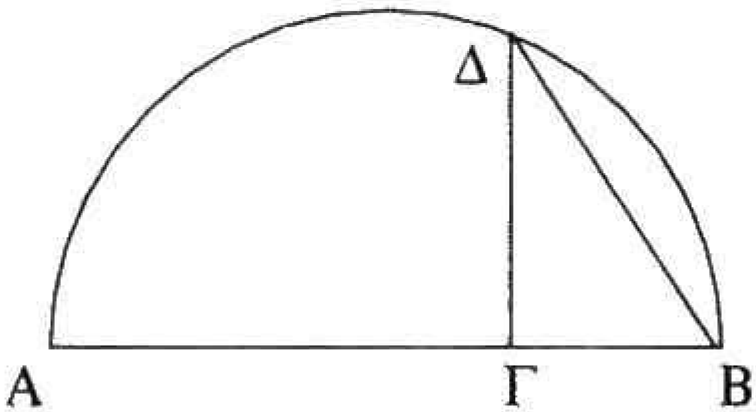
Por consiguiente, se ha envuelto el octaedro en la esfera dada. Y se ha demostrado al mismo tiempo que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro. Q. E. D.

Proposición 15

Construir un cubo y envolverlo en una esfera como la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo.

Póngase AB como diámetro de la esfera dada y córtese por el punto Γ de modo que AΓ sea el doble de ΓB; descríbase sobre AB, el semicírculo AΓB; desde el punto Γ, trácese ΓΔ formando ángulos rectos con AB, y trácese ΔB; póngase el cuadrado EZHΘ que tenga el lado igual a ΔB, y trácense, desde los puntos E, Z, H, Θ las (rectas) EK, ZΛ, HM, ΘN formando ángulos rectos con el plano del cuadrado EZHΘ; y de EK, ZΛ, HM, ΘN quítense respectivamente EK, ZΛ, HM, ΘN iguales a una de las (rectas) EZ, ZH, HΘ, ΘE, y trácense KΛ, ΛM, MN, NK; entonces se ha construido el cubo ZN comprendido por seis cuadrados iguales. Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo.





Trácense, pues, KH, EH. Y como el ángulo KEH es recto, porque KE forma ángulos rectos con el plano EH y, evidentemente, también con la recta EH [XI Def. 3], entonces el semicírculo descrito sobre KH pasará por el punto E. Como, a su vez, HZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ZΛ, ZE, entonces HZ forma ángulos rectos también con el plano ZK; de modo que, si trazamos la (recta) ZK, HZ formará también ángulos rectos con la (recta) ZK; y por eso, el semicírculo descrito sobre HK pasará a su vez por el (punto) Z. De manera semejante, pasará también por los puntos (angulares) restantes del cubo. Entonces, si, permaneciendo fija KH, se hace girar el semicírculo y se vuelve al mismo lugar de donde empezó a moverse, el cubo quedará envuelto en la esfera.

Digo además que en la esfera dada.

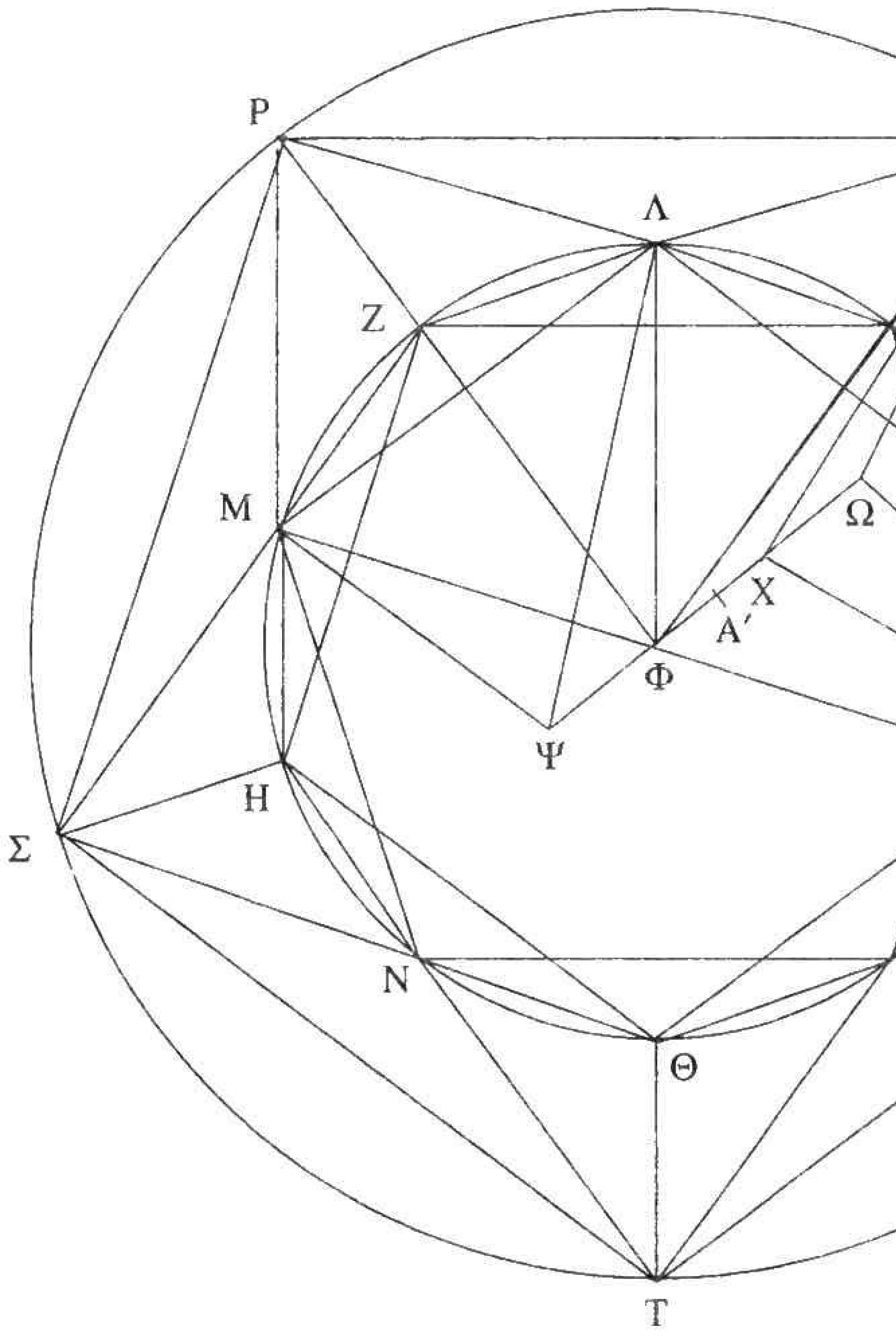
Pues como HZ es igual a ZE y el ángulo correspondiente a Z es recto, entonces el cuadrado de EH es el doble del de EZ. Pero EZ es igual a EK; entonces el cuadrado de EH es el doble del cuadrado de EK; de modo que los cuadrados de HE, EK, es decir, el cuadrado de HK [I 47], son el triple del cuadrado de EK. Y como AB es el triple de BΓ, mientras que, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BΔ, entonces el cuadrado de AB es el triple del cuadrado de BΔ. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de HK es el triple del cuadrado de KE. Y KE se ha hecho igual a ΔB; luego KH es también igual a AB. Y AB es el diámetro de la esfera dada; por tanto, KH es igual al diámetro de la esfera dada.

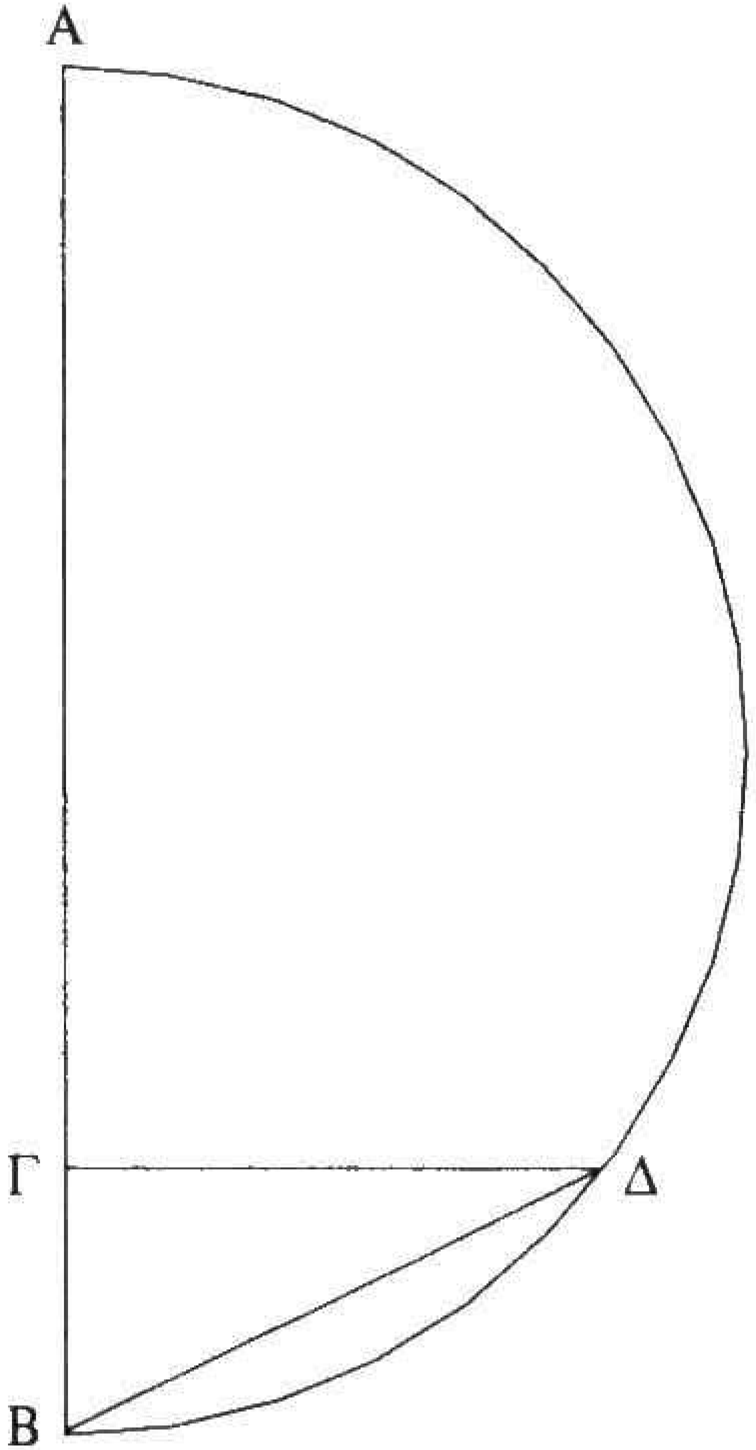
Por consiguiente, el cubo ha quedado envuelto en la esfera dada y se ha demostrado, al mismo tiempo, que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo. Q. E. D.

Proposición 16

Construir un icosaedro y envolverlo en una esfera, como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Póngase AB como diámetro de la esfera dada [véase la figura de la pág. 344] y córtese por el punto Γ de modo que AΓ sea el cuádruple de ΓB; descríbase sobre AB el semicírculo AΔB; trácese desde Γ la línea recta ΓΔ que forme ángulos rectos con AB, y trácese ΔB; póngase el círculo EZHΘK, cuyo radio sea igual a ΔB, e inscríbase en el círculo EZHΘK el pentágono equilátero y equiangular EZHΘK; divídanse en dos partes iguales las circunferencias EZ, ZH, HΘ, ΘK, KE por los puntos Λ, M, N, Ξ, O, y trácense ΛM, MN, NΞ, ΞO, OΛ, EO. Entonces, el pentágono ΛMNΞO es también equilátero, y la recta EO es (el lado) de un decágono. Y desde los puntos E, Z, H, Θ, K, levántense las rectas EΠ, ZP, HΣ, ΘT, KY que formen ángulos rectos con el plano del círculo y sean iguales al radio del círculo EZHΘK; trácense ΠP, PΣ, ΣT, TY, YΠ, ΠΛ, ΛP, PM, MΣ, ΣN, NT, TΞ, ΞY, YO, OΠ. Y como cada una de las (rectas) EΠ, KY forma ángulos rectos con el mismo plano, entonces EΠ es paralela a KY [XI 6]. Pero también es igual a ella. Y las rectas que unen por los (extremos) del mismo lado a (rectas) iguales y paralelas, son también ellas mismas iguales y paralelas [I 33]. Entonces ΠY es igual y paralela a EK. Pero EK es (un lado) del pentágono equilátero; luego ΠY también es (un lado) del pentágono equilátero inscrito en el círculo EZHΘK. Por lo mismo, cada una de las (rectas) ΠP, PΣ, ΣT, TY es (un lado) del pentágono equilátero inscrito en el círculo EZHΘK; luego el pentágono ΠPΣTY es equilátero. Y como ΠE es (el lado) de un hexágono mientras que EO es (el lado) de un decágono, y el ángulo ΠEO es recto, entonces ΠO es (el lado) de un pentágono, porque el cuadrado del lado del pentágono es igual al cuadrado del lado del hexágono y el del decágono inscritos en el mismo círculo [XIII 10]. Por lo mismo, OY es también un lado del pentágono. Pero ΠY es también (un lado) del pentágono; luego el triángulo ΠOY es equilátero. Por lo mismo cada uno de los (triángulos) ΠΛP, PMΣ, ΣNT, TΞY es equilátero. Y como se ha demostrado que cada una de las (rectas) ΠΛ, ΠO es (un lado) del pentágono, ΛO también es (un lado) del pentágono, entonces el triángulo ΠΛO es equilátero. Por lo mismo, cada uno de los triángulos ΛPM, MΣN, NTΞ, ΞYO es equilátero. Tómese el punto Φ como centro del círculo EZHΘK; y a partir de Φ, levántese ΦΩ formando ángulos rectos con el plano del círculo y prolónguese hacia el otro lado como ΦΨ, y quítese ΦX, lado del hexágono, y cada una de las (rectas) ΦΨ, XΩ, lados del decágono, y trácense ΠΩ, ΠX, YΩ, EΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨM. Ahora bien, como cada una de las (rectas) ΦX, ΠE forma ángulos rectos con el plano del círculo, entonces ΦX es paralela a ΠE [XI 6]. Pero también son iguales; entonces EΦ, ΠX también son iguales y paralelas [I 33]; pero EΦ es (el lado) de un hexágono; entonces ΠX es también (el lado) de un hexágono. Y como ΠX es (el lado) de un hexágono y XΩ (el) de un decágono y el ángulo ΠXΩ es recto, entonces ΠΩ es el lado de un pentágono [XIII 10]. Por lo mismo YΩ es también el (lado) de un pentágono, porque si trazamos ΦK, XY serán también iguales y opuestas, y ΦK, siendo un radio, es (el lado) de un hexágono [IV 15 Por.], entonces XY es (el lado) de un hexágono. Pero XΩ es (el lado) de un decágono, y el ángulo YXΩ es recto, entonces YΩ es (el lado) de un pentágono [XIII 10]. Pero ΠY también es de un pentágono; luego el triángulo ΠYΩ es equilátero. Por lo mismo, cada uno de los restantes triángulos cuyas bases son las rectas ΠP, PΣ, ΣT, TY, y su vértice el punto Ω son equiláteros. Y como ΦΛ es a su vez (el lado) de un hexágono y ΦΨ (el) de un decágono y el ángulo ΛΦΨ es recto, entonces ΛΨ es (el lado) de un pentágono [XIII 10]. Por lo mismo, si trazamos MΦ que es (el lado) de un hexágono, se sigue que MΨ también es el (lado) de un pentágono y ΛM también es el (lado) de un pentágono; luego el triángulo ΛMΨ es equilátero. De manera semejante se demostraría que cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son MN, NΞ, ΞO, OΛ y su vértice el punto Ψ son equiláteros. Por tanto, se ha construido un icosaedro comprendido por veinte triángulos equiláteros.


P
Λ
Z
M
Ω
X
A′
Φ
Ψ
H
Σ
N
Θ
T



Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Pues como ΦX es (el lado) de un hexágono y XΩ de un decágono, entonces ΦΩ se ha cortado en extrema y media razón por el (punto) X y ΦX es su segmento mayor [XIII 9]; entonces, como ΩΦ es a ΦX, así ΦX a ΦΨ; pero ΦX es igual a ΦE y XΩ a ΦΨ; entonces, como XΩ es a ΦE, así EΦ a ΦΨ, y los ángulos ΩΦE, EΦΨ son rectos; luego, si trazamos la recta EΩ, el ángulo ΨEΩ será recto por la semejanza de los triángulos

ΨΕΩ, ΦΕΩ. Por lo mismo, dado que, como ΩΦ es a ΦΧ, así ΦΧ a ΧΩ, mientras que ΩΦ es igual a ΨΧ y ΦΧ a ΧΠ, entonces, como ΨΧ es a ΧΠ, así ΠΧ a ΧΩ. Y de nuevo, por la misma razón, si trazamos ΠΨ, el ángulo correspondiente a Π será recto [VI 8]; luego el semicírculo descrito sobre ΨΩ pasará también por Π [III 31]. Y si permaneciendo fija ΨΩ, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la misma posición desde donde empezó a moverse pasará también por Π y los puntos (angulares) restantes del icosaedro; y el icosaedro quedará envuelto en una esfera.

Digo ahora que en la esfera dada.

Divídase, pues, ΦΧ en dos partes iguales por el punto Α'. Y como la línea recta ΦΩ ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) Χ y su segmento menor es ΩΧ, entonces el cuadrado de ΩΧ añadido a la mitad del segmento mayor ΧΑ' es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor [XIII 3]; entonces el cuadrado de ΩΑ' es cinco veces el cuadrado de Α'Χ. Ahora bien, ΩΨ es el doble de ΩΑ' y ΦΧ el doble de Α'Χ; entonces, el cuadrado de ΩΨ es cinco veces el cuadrado de ΧΦ. Y como ΑΓ es el cuádruple de ΓΒ, entonces ΑΒ es cinco veces ΒΓ. Pero como ΑΒ es a ΒΓ, así el cuadrado de ΑΒ al cuadrado de ΒΔ [VI 8; V Def. 9]; luego el cuadrado de ΑΒ es cinco veces el cuadrado de ΒΔ. Pero se ha demostrado que el cuadrado de ΩΨ es cinco veces el cuadrado de ΦΧ. Y ΔΒ es igual a ΦΧ, porque cada una de ellas es igual al radio del círculo ΕΖΗΘΚ; entonces ΑΒ es igual a ΨΩ. Y ΑΒ es el diámetro de la esfera dada; luego ΨΩ es igual al diámetro de la esfera dada. Por tanto, el icosaedro queda envuelto en la esfera dada.

Digo ahora que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Pues como el diámetro de la esfera es expresable y su cuadrado es el quíntuple del radio del círculo ΕΖΗΘΚ, entonces el radio del círculo ΕΖΗΘΚ es expresable, de modo que también su diámetro es expresable. Pero si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo de diámetro expresable, el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada «menor» [XIII 11]. Pero el lado del pentágono es el lado del icosaedro.

Por consiguiente, el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

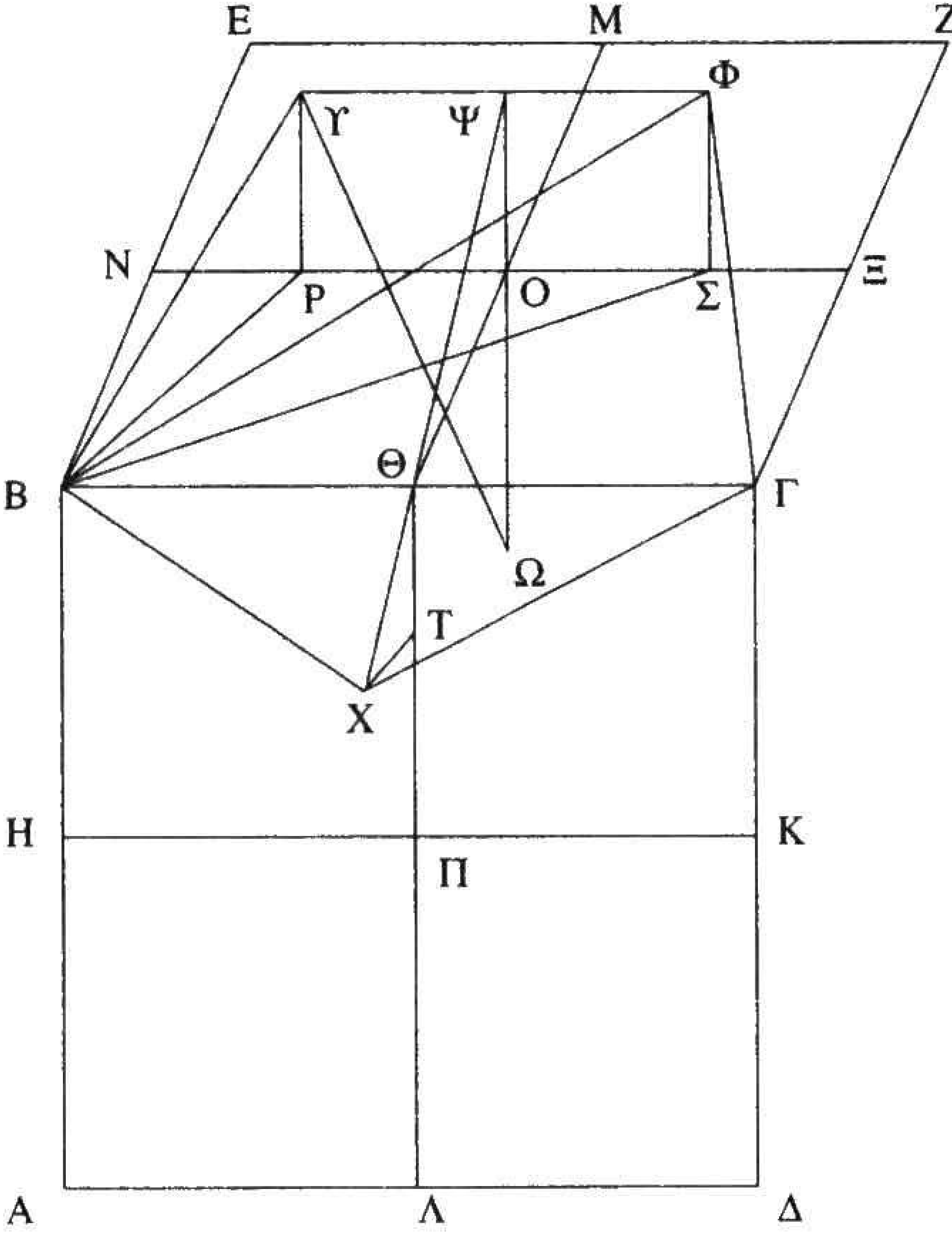
Porisma:

A partir de esto queda claro que el cuadrado del diámetro de la esfera es el quíntuple del (cuadrado del) radio del círculo a partir del cual se ha trazado el icosaedro, y que el diámetro de la esfera está compuesto por el (lado) del hexágono y dos de los (lados) del decágono inscritos en el mismo círculo. Q. E. D.

Proposición 17

Construir un dodecaedro y envolverlo en una esfera como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del dodecaedro es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Pónganse los dos planos ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ del cubo antedicho formando ángulos rectos entre sí y divídase en dos partes iguales cada uno de los lados ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ por los puntos Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ; trácense ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, y córtese cada una de las (rectas) ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ en extrema y media razón por los puntos Ρ, Σ, Τ, y sean sus segmentos mayores ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ; levántense desde los puntos Ρ, Σ, Τ, las (rectas) ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ formando ángulos rectos con los planos del cubo hacia la parte exterior del cubo, y háganse iguales a ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, y trácense ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ.



E
M
Z
Φ
Υ
Ψ
N
Ξ
Ρ
O
Σ
Θ
B
Γ
Ω
T
X
H
K
Π
A
Λ
Δ

Digo que el pentágono ΥΒΧΓΦ es equilátero y está en un plano y además que es equiangular.

Trácense, pues, ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Y como la recta ΝΟ ha sido cortada en extrema y media razón por el punto Ρ y ΡΟ es el segmento mayor, entonces, los cuadrados de ΟΝ, ΝΡ son el triple del cuadrado de ΡΟ [XIII 4]. Pero ΟΝ es igual a ΝΒ y ΟΡ a ΡΥ; entonces, los cuadrados de ΒΝ, ΝΡ son el triple del cuadrado de ΡΥ. Pero el cuadrado de ΒΡ es igual a los cuadrados de ΒΝ, ΝΡ [I 47]; entonces, el cuadrado de ΒΡ es el triple del cuadrado de ΡΥ; de modo que los cuadrados de ΒΡ, ΡΥ son el cuádruple del cuadrado de ΡΥ. Pero el cuadrado de ΒΥ es igual a los cuadrados de ΒΡ, ΡΥ; entonces el cuadrado de ΒΥ es el cuádruple del cuadrado de ΥΡ; luego ΒΥ es el doble de ΡΥ. Pero ΦΥ es también el doble de ΥΡ, porque ΣΡ también es (el doble) de ΟΡ, es decir de ΡΥ. Entonces ΒΥ es igual a ΥΦ. De manera semejante se demostraría que cada una de las (rectas) ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ es igual a cada una de las (rectas) ΒΥ, ΥΦ. Luego el pentágono ΒΥΦΓΧ es equilátero.

Digo ahora que también está en un plano.

Trácese, pues, desde el punto Ο, la (recta) ΟΨ paralela a cada una de las (rectas) ΡΥ, ΣΦ hacia la parte exterior del cubo, y trácense ΨΘ, ΘΧ.

Digo que ΨΘΧ es una recta.

Pues como ΘΠ ha sido cortada en extrema y media razón por Τ, y su segmento mayor es ΠΤ, entonces, como ΘΠ es a ΠΤ, así ΠΤ a ΤΘ. Pero ΘΠ es igual a ΘΟ, y ΠΤ a cada una de las (rectas) ΤΧ, ΟΨ; entonces, como ΘΟ es a ΟΨ, así ΧΤ a ΤΘ. Ahora bien, ΘΟ es paralela a ΤΧ, porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano ΒΔ [XI 6]; y ΤΘ (es paralela) a ΟΨ, porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano ΒΖ [id.]. Pero si dos triángulos como ΨΟΘ, ΘΤΧ, que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro), se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, las restantes rectas estarán en línea recta [VI 32]. Entonces ΦΘ estará en línea recta con ΘΧ. Pero toda recta está en un plano [XI 1]; luego el pentágono ΥΒΧΓΦ está en un plano.

Digo ahora que es equiangular.

Pues como la línea recta ΝΟ ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) Ρ, y su segmento mayor es ΟΡ, y ΟΡ es igual a ΟΣ, entonces ΝΣ ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) Ο, y su segmento mayor es ΝΟ [XIII 5]; luego los (cuadrados) de ΝΣ, ΣΟ son el triple del cuadrado de ΝΟ [XIII 4]. Pero ΝΟ es igual a ΝΒ y ΟΣ a ΣΦ; entonces los cuadrados de ΝΣ, ΣΦ son el triple del cuadrado de ΝΒ; de modo que los cuadrados de ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ son el cuádruple del cuadrado de ΝΒ. Pero el cuadrado de ΣΒ es igual a los cuadrados de ΣΝ, ΝΒ; entonces los cuadrados de ΒΣ, ΣΦ, es decir, el cuadrado de ΒΦ (porque el ángulo ΦΒΣ es recto), son el cuádruple del cuadrado de ΝΒ; luego ΦΒ es el doble de ΒΝ. Pero ΒΓ es también el doble de ΒΝ; entonces ΒΦ es igual a ΒΓ. Ahora bien, como las dos rectas ΒΥ, ΥΦ son iguales a las dos rectas ΒΧ, ΧΓ y la base ΒΦ es igual a la base ΒΓ, entonces el ángulo ΒΥΦ es igual al ángulo ΒΧΓ [I 8]. De manera semejante demostraríamos que el ángulo ΥΦΓ es igual al ángulo ΒΧΓ; entonces los tres ángulos ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ son iguales entre sí. Pero si tres ángulos de un pentágono equilátero son iguales entre sí, el pentágono será equiangular [XIII 7]; luego el pentágono ΒΥΦΓΧ es equiangular; y se ha demostrado que también es equilátero; por tanto, el pentágono ΒΥΦΓΧ es equilátero y equiangular y está sobre un lado, ΒΓ, del cubo. Por tanto, si seguimos la misma construcción sobre cada uno de los doce lados del cubo, se construirá una figura sólida comprendida por doce pentágonos equiláteros y equiangulares que se llama dodecaedro.

Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.

Prolónguese, pues, ΨΟ y resulte ΨΩ; entonces, ΟΩ da con el diámetro del cubo y se dividen en dos partes iguales una a otra, porque esto se ha demostrado en el penúltimo teorema del libro XI [XI 38]. Córtense por el punto Ω; entonces Ω es el centro de la esfera que envuelve el cubo y ΩΟ es la mitad del lado del cubo. Trácese ahora ΥΩ, y como la línea recta ΝΣ ha sido cortada en extrema y media razón por el punto Ο y su segmento mayor es ΝΟ, entonces los cuadrados de ΝΣ, ΣΟ son el triple del cuadrado de ΝΟ [XIII 4]. Pero ΝΣ es igual a ΨΩ, porque también ΝΟ es igual a ΟΩ y ΨΟ a ΟΣ. Pero también ΟΣ (es igual) a ΩΥ, porque también (es igual) a ΡΟ; entonces los cuadrados de ΩΨ, ΨΥ son el triple del cuadrado de ΝΟ. Pero el cuadrado de ΥΩ es igual a los cuadrados de ΩΨ, ΨΥ; entonces el cuadrado de ΥΩ es el triple del cuadrado de ΝΟ. Pero el cuadrado del radio de la esfera que envuelve al cubo es también el triple del cuadrado de la mitad del lado del cubo, pues se ha demostrado anteriormente cómo construir un cubo y envolverlo en una esfera y cómo probar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo [XIII 15]. Y si el todo (es el triple) del todo, también la mitad lo es de la mitad; y ΝΟ es la mitad del lado del cubo; luego ΥΩ es igual al radio de la esfera que envuelve al cubo. Ahora bien Ω es el centro de la esfera que envuelve al cubo; entonces el punto Υ está en la superficie de la esfera. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los restantes ángulos del dodecaedro están en la superficie de la esfera; por tanto, el dodecaedro queda envuelto en la esfera dada.

Digo ahora que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.

Pues como, una vez cortada ΝΟ en extrema y media razón, ΡΟ es su segmento mayor y, una vez cortada ΟΞ en extrema y media razón, ΟΣ es su segmento mayor; entonces, si se corta la recta entera ΝΞ en extrema y media razón, su segmento mayor es ΡΣ. Puesto que, como ΝΟ es a ΟΡ, ΟΡ a ΡΝ, también lo son los dobles, porque las partes guardan la misma razón que sus equimúltiplos [V 15]. Luego, como ΝΞ es a ΡΣ, así ΡΣ a la suma de ΝΡ, ΣΞ. Pero ΝΞ es mayor que ΡΣ, entonces ΡΣ es mayor que la suma de ΝΡ, ΣΞ; entonces ΝΞ ha sido cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es ΡΣ. Y ΡΣ es igual a ΥΦ; luego, si se corta ΝΞ en extrema y media razón, el segmento mayor es ΥΦ. Y como el diámetro de la esfera es expresable y su cuadrado es el triple del cuadrado del lado del cubo, entonces ΝΞ, que es el lado del cubo, es expresable. Pero si una línea expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es una recta sin razón expresable (llamada) apótoma [XIII 6].

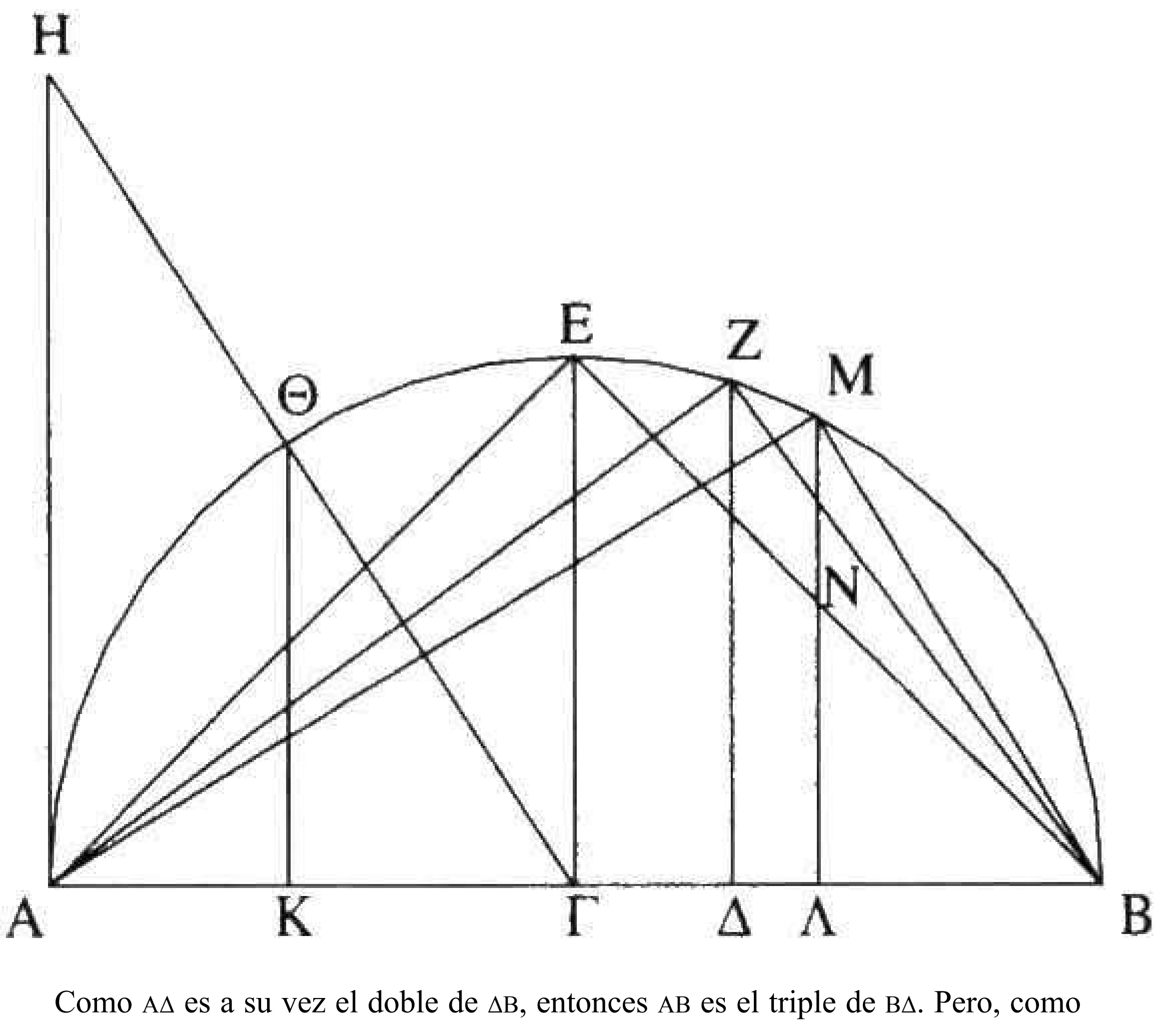
Porisma:

A partir de esto queda claro que, si se corta el lado del cubo en extrema y media razón, el segmento mayor es el lado del dodecaedro. Q. E. D.

Proposición 18

Poner los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.

Póngase el diámetro AB de la esfera dada y córtese por el punto Γ de modo que AΓ sea igual a ΓB, y por el punto Δ de modo que AΔ sea el doble de ΔB; y descríbase sobre AB el semicírculo AEB, y a partir de Γ, Δ, trácense ΓE, ΔZ formando ángulos rectos con AB, y trácense AZ, ZB, EB. Y como AΔ es el doble de ΔB, entonces AB es el triple de BΔ. Luego, por conversión, BA es una vez y media AΔ. Pero como BA es a AΔ, así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [V Def. 9; VI 18]; porque el triángulo AZB es de ángulos iguales a los del triángulo AZΔ; entonces el cuadrado de BA es una vez y media el cuadrado de AZ. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera también es una vez y media el (cuadrado del) lado de la pirámide [XIII 3]. Y AB es el diámetro de la esfera; luego AZ es igual al lado de la pirámide.



Como AΔ es a su vez el doble de ΔB, entonces AB es el triple de BΔ. Pero, como AB es a BΔ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BZ [VI 8; V Def. 9]; entonces el cuadrado de AB es el triple del cuadrado de BZ. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del lado del cubo [XIII 15]. Y AB es el diámetro de la esfera; luego BZ es el lado del cubo.

Y como AΓ es igual a ΓB, entonces AB es el doble de BΓ. Pero, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BE; entonces el cuadrado de AB es el doble del cuadrado de BE. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es también el doble del (cuadrado del) lado del octaedro [XIII 14]. Y AB es el diámetro de la esfera dada; luego BE es el lado del octaedro.

Trácese, pues, desde el punto A, AH formando ángulos rectos con AB, y hágase AH igual a AB; trácese HΓ y, desde Θ, trácese ΘK perpendicular a AB. Ahora bien, dado que HA es el doble de AΓ, porque HA es igual a AB; y como HA es a AΓ, así ΘK a KΓ, entonces ΘK es el doble de KΓ. Luego el cuadrado de ΘK es el cuádruple del cuadrado de KΓ. Por tanto, los cuadrados de ΘK, KΓ que son el cuadrado de ΘΓ, son el quíntuple del cuadrado de KΓ. Pero ΘΓ es igual a ΓB; entonces el cuadrado de BΓ es el quíntuple del cuadrado de ΓK. Y como AB es el doble de ΓB, y en ellas AΔ es el doble de ΔB, entonces la (recta) restante BΔ es el doble de la (recta) restante ΔΓ. Luego BΓ es el triple de ΓΔ; por tanto, el cuadrado de BΓ es nueve veces el cuadrado de ΓΔ. Pero el cuadrado de BΓ es el quíntuple del cuadrado de ΓK; entonces el cuadrado de ΓK es mayor que el cuadrado de ΓΔ. Luego ΓK es mayor que ΓΔ. Hágase ΓΔ igual a ΓK y por el (punto) Δ trácese ΔM formando ángulos rectos con AB, y trácese MB. Y como el cuadrado de BΓ es el quíntuple del cuadrado de ΓK y AB es el doble de BΓ y KΛ el doble de ΓK, entonces el cuadrado de AB es el quíntuple del cuadrado de KΛ. Pero también el cuadrado del diámetro de la esfera es el quíntuple del radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro [XIII 16 Por.]. Y AB es el diámetro de la esfera; entonces KΛ es el radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro; luego KΛ es un lado del hexágono en el círculo antedicho [IV 15 Por.]. Y como el diámetro de la esfera está compuesto a partir del (lado) del hexágono y dos (lados) de los del decágono inscrito en el círculo antedicho, y AB es el diámetro de la esfera, mientras que KΛ es el lado del hexágono y AK es igual a ΛB, entonces cada una de las (rectas) AK, ΛB es un lado del decágono inscrito en el círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro. Y como ΛB es un (lado) del decágono y MΛ del hexágono, porque es igual a KΛ y porque es también igual a ΘK —pues están a igual distancia del centro— y cada una de las (rectas) ΘK, KΛ es el doble de KΓ, entonces MB es un lado del pentágono [XIII 10]. Y el lado del pentágono es el del icosaedro [XIII 16]; entonces MB es el lado del icosaedro.

Ahora bien, como ZB es el lado del cubo, córtese en extrema y media razón por el punto N y sea NB el segmento mayor; entonces NB es un lado del dodecaedro [XIII 17 Por.].

Y como se ha demostrado que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado AZ de la pirámide, mientras que es el doble del cuadrado del lado BE del octaedro, y el triple del cuadrado del lado ZB del cubo, entonces el cuadrado del diámetro de la esfera (tiene) seis partes, de las que el (cuadrado del lado) de la pirámide (tiene) cuatro, el del octaedro, tres y el del cubo dos. Luego el cuadrado del lado de la pirámide es cuatro tercios del cuadrado del lado del octaedro y el doble del cuadrado del lado del cubo, y el cuadrado del lado del octaedro es una vez y media el del lado del cubo. Así pues, los lados de las tres figuras antedichas, digo, de la pirámide, del octaedro y del cubo, guardan entre sí razones expresables. Pero los dos restantes, digo el del icosaedro y el del dodecaedro no guardan razones expresables ni entre sí ni con los antedichos, porque son, una «menor» [XIII 16] y otra, apótoma [XIII 17].

Demostraremos de la siguiente manera que el lado MB del icosaedro es mayor que el (lado) NB del dodecaedro:

Pues como el triángulo ZΔB es de ángulos iguales a los del triángulo ZAB [VI 8], proporcionalmente, como ΔB es a BZ, así BZ a BA [VI 4]. Y como las tres rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera, así el cuadrado de la primera al cuadrado de la segunda [V Def. 9; VI 20 Por.], entonces, como ΔB es a BA, así el cuadrado de ΔB al (cuadrado) de BZ; luego, por inversión, como AB es a BΔ, así el cuadrado de ZB al cuadrado de BΔ. Pero AB es el triple de BΔ; entonces el cuadrado de ZB es el triple del cuadrado de BΔ. Pero el cuadrado de AΔ es el cuádruple del (cuadrado) de ΔB, porque AΔ es el doble de ΔB; entonces el cuadrado de AΔ es mayor que el cuadrado de ZB; luego AΔ es mayor que ZB; por tanto, AΛ es mucho mayor que ZB. Y si AΛ se corta en extrema y media razón, su segmento mayor es KΛ, porque ΛK es un lado del hexágono y KA del decágono [XIII 9]; pero si ZB se corta en extrema y media razón, su segmento mayor es NB; entonces KΛ es mayor que NB. Pero KΛ es igual a ΛM; luego ΛM es mayor que NB. Por tanto, el lado MB que es el (lado) del icosaedro es mucho mayor que NB que es el lado del dodecaedro. Q. E. D.

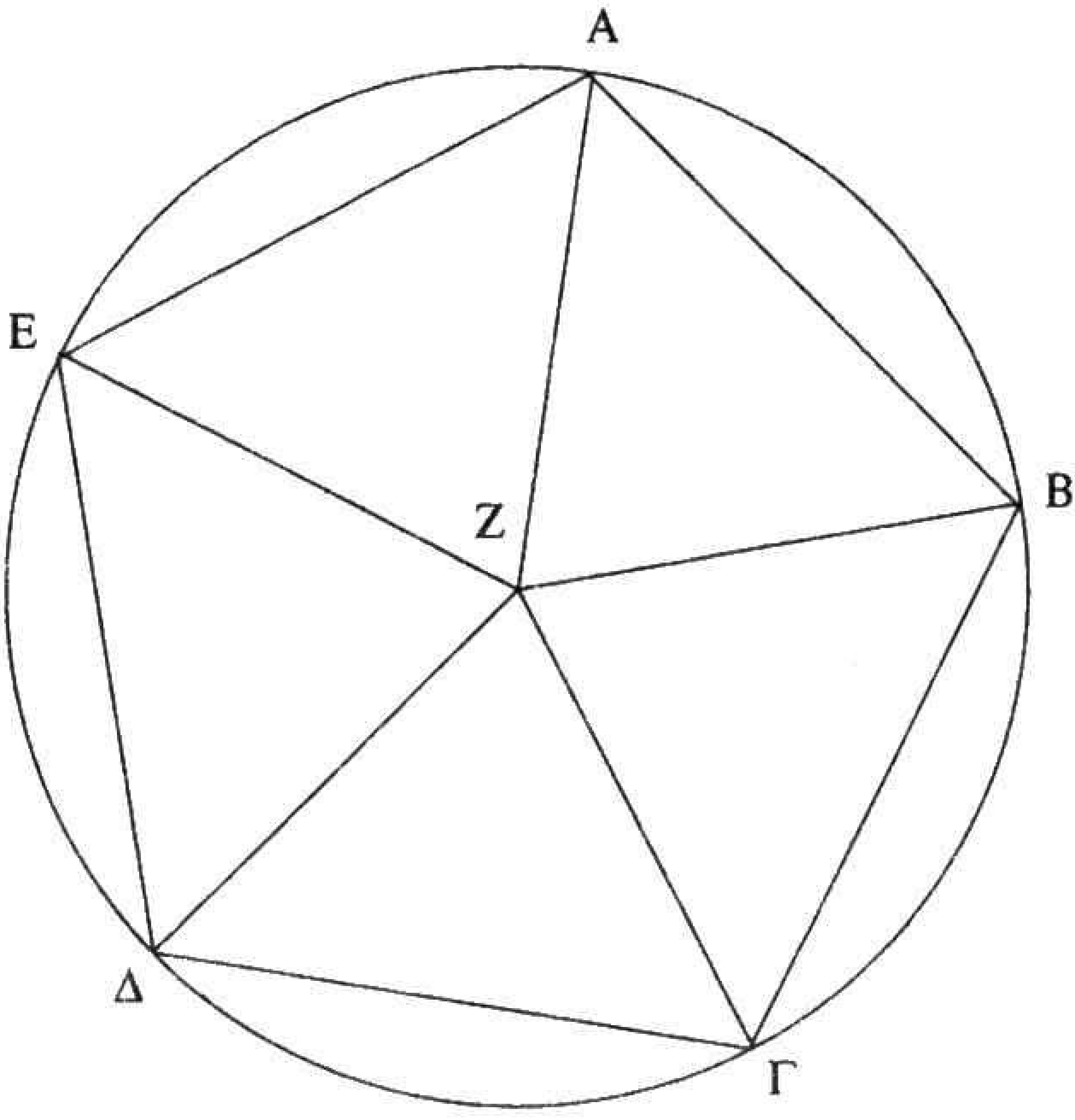
Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares (colocados) en un sólo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos [XI 21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el (ángulo) del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad.

Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares. Q. E. D.[76].

LEMA

Hay que demostrar de la siguiente manera que el ángulo del pentágono equilátero y equiangular es un recto más un quinto.



Pues sea ΑΒΓΔΕ un pentágono equilátero y equiangular y circunscríbase en torno a él el círculo ΑΒΓΔΕ, y tómese su centro Ζ; trácense ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. Entonces dividen en dos partes iguales los ángulos correspondientes a Α, Β, Γ, Δ, Ε del pentágono. Y como los cinco ángulos correspondientes a Ζ son iguales a cuatro rectos y son iguales, entonces uno de ellos, como el ΑΖΒ, es un recto menos un quinto; luego los restantes ángulos ΖΑΒ, ΑΒΖ son un recto y un quinto. Pero el ángulo ΖΑΒ es igual al ángulo ΖΒΓ; por tanto, el ángulo entero ΑΒΓ del pentágono es un recto y un quinto. Q. E. D.

[70] Las cinco primeras proposiciones de este libro tienen más bien el carácter de lemas requeridos para pruebas posteriores. Es probable que procedan de Eudoxo, pues PROCLO (pág. 67, 6) dice que Eudoxo «incrementó considerablemente el número de teoremas referidos a la sección a partir de Platón». Es de suponer que se trate de la sección áurea.

Los mss. contienen una curiosa adición a XIII 1-5 que ofrece *análisis* y *síntesis* de cada una de estas proposiciones. Se trata de un apéndice titulado «¿Qué es análisis y qué es síntesis?» y prosigue: *«Análisis* es la asunción de lo buscado como si ya fuera admitido ⟨y el acceso⟩ por medio de sus implicaciones a algo que se reconoce verdadero. *Síntesis* es una asunción de lo que es reconocido ⟨y el acceso⟩ por medio de sus implicaciones a algo que se admite como verdadero [o, según B y V, a la consecución de lo buscado]». Puede que la matemática griega no haya legado a la posteridad dos nociones metodológicas más sugerentes y más problemáticas que éstas. Los problemas ya nacen de los textos mismos: hay tres versiones clásicas del proceder por análisis y síntesis, a saber: la presente interpolación en los *Elementos,* la glosa de PAPPO (*Synagōgḗ,* VII 634-636, mucho más extensa) y una breve referencia existente en un comentario de Herón a los *Elementos* II transmitido por al-Nayrizi; todas ellas se prestan a equívocos. Los problemas siguen en los diversos planos en que pueden entenderse ambos procedimientos complementarios y guardan relación con el sentido de uno y otro proceder en cada plano. Cabe entender que se mueven en el plano de las técnicas de resolución de problemas geométricos y, entonces, dirían relación a dos vías solidarias de invención y de confirmación de la solución buscada, aparte de hacer referencia a otras nociones como la de *diorismós.* Cabe entender que se mueven en el plano de la prueba de teoremas o proposiciones y, entonces, dirían relación a dos procesos de inferencia: uno parte de la proposición objeto de la prueba, como si se tratara de una asunción táctica o provisional, y se dirige, mediante el análisis de sus presuposiciones, hacia unos supuestos básicos o unos principios congruentes; la síntesis, a su vez, toma pie en estos principios para establecer en un proceso normal de deducción de consecuencias la proposición en cuestión como un teorema. No faltan, en cualquier caso, nuevos problemas bien de orden lógico —ya advertidos por Aristóteles *(e. g.* en *Analíticos Segundos* 78a7-13)—, bien de orden metodológico. Es probable que ambas nociones pasaran de una aplicación inicial en el ámbito de la resolución de problemas a una proyección posterior en el ámbito de las proposiciones gobernadas por principios y definiciones, aunque nunca perdieran su capacidad heurística y sus usos resolutorios a juzgar por testimonios como el de Pappo. Puede verse un sucinto panorama de estas cuestiones y de su proyección sobre discusiones actuales en lógica y en filosofía de las matemáticas, en L. VEGA, *La trama de la demostración,* págs. 90-92. Para colmo, la historia posterior de este legado matemático griego se ha complicado con nuevas confusiones: por ejemplo, las ideas sobre el análisis y la síntesis se reciben en el Occidente medieval de los ss. XIII–XV entremezcladas con otros procedimientos un tanto análogos de investigación e explicación causal *(resolutio, compositio),* que tienen que ver con la tradición arábigo-galénica mucho más que con la tradición arábigo-euclidiana. Un desenlace de estas y otras aventuras es la multiplicidad de sentidos que las nociones de análisis y de síntesis alcanzan a tener con el desarrollo de la ciencia moderna (*e. g.* desde su uso en Descartes hasta su uso en Newton), tanto dentro como fuera de las matemáticas. Puede dar una idea al respecto D. OLDROYD, *El arco del conocimiento,* Barcelona, 1993; *e. g.,* págs. 45-51, 60-63, 117-118, 125-129.

[71] Heiberg duda con razón de la autenticidad del lema y no deja de parecerle insólito o desmesurado el estilo empleado en la alusión a la reducción al absurdo. Dice literalmente: *Dubito an hoc lemma genuinum non sit, neque enim opus est, et dicendi genus lin. 18 paulo insolentius est.*

[72] Esta proposición parece interpolada. P cuenta con ella, pero el copista dice que «este teorema no se encuentra en la mayoría de las copias de nueva recensión, si bien se halla en las copias de la antigua». En primer lugar, hay un escolio a XIII 17 que prueba lo mismo que XIII 6 y que no tendría sentido si XIII 6 lo hubiera precedido. De ahí se infiere que, cuando el escolio fue escrito, esta proposición no se habría interpolado todavía. Por otra parte, P tiene esta proposición antes de la prueba alternativa de XIII 5; esta prueba se considera interpolada y parece que XIII 6 debe ser una interpolación posterior que la separa de la proposición a que pertenecía. Por último, existen razones para sospechar de la propia proposición porque, mientras el enunciado establece que cada segmento de recta es una apótoma, la proposición añade que el segmento menor es una primera apótoma, punto que no está presente en el escolio en p. Lo que realmente se requiere en XIII 17 es que el segmento mayor sea una apótoma. Es probable que Euclides asumiera que este hecho resultaba bastante claro a partir de XIII 1, y que ni escribiera XIII 6 ni la referencia a su enunciado en XIII 17.

[73] Números en el original.

[74] Traduzco *perilambánō* por «envolver» para distinguirlo de *engráphō* «inscribir» o *perigráphō* «circunscribir».

[75] Se refiere al lema que sigue a la proposición, lema cuya autenticidad se pone en duda.

[76] Como ya se ha sugerido en la nota introductoria a la geometría del espacio *(vid. supra,* nota 49), las connotaciones cosmológicas y simbólicas de los poliedros regulares, en las tradiciones neoplatónica y

neopitagórica, dieron a su estudio una coloración especial. Hasta el punto de que el mismo Proclo, en su comentario al libro I de los *Elementos,* asegura que un objetivo capital de Euclides era precisamente el de cerrar con este broche de oro su composición —la verdad es que Euclides nada deja entrever en tal respecto—. Sea como fuere, este colofón del libro XIII, la existencia de justamente cinco poliedros regulares distintos, no ha dejado de atraer la atención hasta nuestros días. En cierto sentido, esta determinación de cinco, ni más ni menos, reviste menos importancia que la generación del concepto mismo de regularidad —en la que bien pudo desempeñar un papel decisivo la contribución de Teeteto, *vid.* W. C. WATERHOUSE, «The discovery of the regular solids», *Archive for History of Exact Sciences* 9 (1972), 212-221)—. Por otro lado, según es bien sabido, en el resultado de Euclides ha de sobrentenderse que los poliedros regulares en cuestión son convexos. Pero además de este supuesto adicional, resultan pertinentes otras precisiones añadidas a un concepto restringido de convexidad, si se quiere salvar esa identificación de cinco y sólo cinco. En nuestro siglo (e. g. a partir del estudio enciclopédico de E. STEINITZ, 1916, sobre los poliedros), el resultado de Euclides se asume en el contexto de una definición de la regularidad en términos de equivalencia bajo simetrías: un poliedro es regular si su grupo de simetrías se comporta transitivamente con respecto al triplete compuesto por los elementos: cara, arista, vértice, todos ellos mutuamente incidentes. Vid. el informe de B. GRÜNBAUM, «Regular Polyedra», en I. GRATTAN-GUINNESS, (ed.) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,* Londres-Nueva York, 1994; t. 2, 7.2, págs. 866-876. Por lo demás, tanto el estudio de los poliedros regulares, en general, como la consideración de otras diversas clases de poliedros, siguen siendo temas cultivados en nuestros días. Una muestra de lo primero es la extensión del concepto de poliedro regular a espacios hiperbólicos y otros espacios n-dimensionales, e. g. en la línea de H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes,* Nueva York, 1973[3], y *Regular Complex Polytopes,* Cambridge, 1991[2]. Una muestra de lo segundo es la investigación de poliedros isogonales, i. e. aquellos cuyos vértices son todos ellos equivalentes bajo las simetrías del poliedro, e. g. en la línea de B. GRÜNBAUM y G. C. SHEPHARD, «Polyhedra with transitivity properties», *Comptes rendues, Acad. des Sciences. Soc. Royale Canada 6* (1984), 61-66. Naturalmente, de todo esto no se desprende que Euclides siga siendo un geómetra contemporáneo, o que el lenguaje de los *Elementos* nunca haya dejado de ser una lengua matemática viva y de uso obligado. Más bien se desprende lo contrario. Pero al margen de este punto —que, por cierto, toca un tema de palpitante actualidad entre los historiadores de las matemáticas, el tema de si hay o no revoluciones científicas y cambios de paradigma en estas ciencias, cf. *e. g.* D. GILLIES, ed., *Revolutions in Mathematics,* Oxford, 1992—, es difícil negarse a reconocer el olfato de los antiguos matemáticos griegos para dar con temas de importancia básica, con cuestiones de permanente interés y con objetos capaces de seducir a gentes de diversos tiempos y culturas. Si estas formas de proyección son una de las marcas de un «autor clásico», hay autores clásicos griegos tanto en el campo de las artes y las letras como en el campo del conocimiento y del método científico: los hay a pesar de los prejuicios «literarios» que dan en limitar el legado griego al ámbito de las humanidades; los hay a pesar de los prejuicios «científicos» que dan en suponer que el conocimiento no puede desarrollarse sin matar al padre. Euclides es un autor clásico.

ÍNDICE GENERAL